

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2010–2011 Úrslitakeppni

### Dæmi 1

Finnið öll pör af heiltölum  $(a, b)$ , ekki neikvæðum, sem að uppfylla jöfnuna:

$$2^a \cdot 3^b - 3^{b+1} + 2^a = 13$$

### Dæmi 2

Hornpunktar tenings eru tölusettir með tölunum frá 1 upp í 8 (hver tala notuð einu sinni). Fyrir hverja brún er mynduð summa talnanna á endapunktum hennar. Er hægt að tölusetja hornpunktana á þann veg að summurnar fyrir brúnirnar séu ólíkar?

### Dæmi 3

Í þríhyrningi  $ABC$  skiptir punktur  $P$  hliðinni  $AB$  í hlutföllunum  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$ . Miðþverill striksins  $PB$  sker hliðina  $BC$  í punkti  $Q$ . Finnið  $BC$  ef vitað er að  $AC = 7$  og  $F(PQC) = \frac{4}{25}F(ABC)$ , þar sem  $F(XYZ)$  táknar flatarmál þríhyrningsins  $XYZ$ .

### Dæmi 4

Jóhanna hleypur daglega annað hvort  $a$  kílómetra eða  $b$  kílómetra, þar sem  $a$  og  $b$  eru jákvæðar heiltölur og  $a > b$ . Jóhanna getur hlaupið nákvæmlega 100 kílómetra á 9 dögum eða 11 dögum en ekki á 10 dögum. Finnið öll hugsanleg gildi á  $a$  og  $b$ .

### Dæmi 5

Finnið allar heiltölur  $a$  og  $b$  þannig að  $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$ .

### Dæmi 6

Leyfilegar tilfærslur frá einni jákvæðri heiltölu til annarrar eru sem hér segir:

- (a) Frá  $n$  má fara til  $2n$  og öfugt.
- (b) Frá  $n$  má fara til  $3n + 1$  og öfugt.

Sannið að sama hvar tilfærslur hefjast, alltaf má komast í 1 með endanlega mörgum tilfærslum.