

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2018-2019 Úrslitakeppni

Athugið: Notið aðskilin blöð eða arkir fyrir hvert dæmi. Þetta skiptir máli við yfirferð.

### Dæmi 1

Finnið allar jákvæðar heilar tölur  $x$  og  $y$  þannig að  $\sqrt{xy + 2019} = \sqrt{x} + \sqrt{2019}$ .

### Dæmi 2

Ef  $n$  er jákvæð heiltala þá tákna  $s(n)$  heiltöluna sem fæst með því að snúa við röð tölustafanna sem mynda  $n$ . Til dæmis er  $s(2019) = 9102$ . Hve margar jákvæðar tveggja stafa heiltölur  $n$  eru þannig að  $n + s(n)$  er ferningstala?

### Dæmi 3

Þríhyrningur  $ABC$  hefur hliðarlengdir 7, 8 og 9. Lína, sem inniheldur miðju innritaðs hrings og liggur samsíða skemmstu hlið þríhyrningsins, sker hinar tvær hliðar þríhyrningsins í punktum  $D$  og  $E$ . Hver er lengd striksins  $DE$ ?

### Dæmi 4

Meðal 25 hesta viljum við finna þrjá þá fljótustu. Við höfum enga klukku en hlaupabraut þar sem við getum látið fimm hesta hlaupa í einu og séð í hvaða röð þeir koma í mark. Gerum ráð fyrir að sérhver hestur hlaupi á föstum hraða og að allir séu þeir misfljótir. Sýnið að hægt er að finna þrjá fljótustu hestana og innbyrðis röð þeirra í sjö hlaupum.

### Dæmi 5

Finnið öll föll  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  þannig að  $f(1) = 2$  og  $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$  fyrir öll  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

### Dæmi 6

Þú stendur fyrir framan 31 hæða hús með tvær nákvæmlega eins glerkúlur. Þú veist að ef þú kastar svona glerkúlum af 31. hæð hússins niður á jörð þá brotna þær. Í húsinu er hæð  $n$  sem er þannig að sé kúlunum kastað niður af hæð  $n$  þá brotna þær og einnig sé þeim kastað af öllum hæðum þar fyrir ofan (ef einhverjar eru), en sé þeim kastað niður af hæðum fyrir neðan hæð  $n$  (ef einhverjar eru) þá brotna þær ekki. Verkefni þitt er að lýsa aðferð sem tryggir að þú finni  $n$  í sem fæstum köstum sama hvar í húsinu hæð  $n$  er.

Ath. Þú mátt kasta hvorri kúlu eins oft og þú vilt af hvaða hæð hússins sem er þar til hún brotnar en brotin kúla er úr leik.