FRÉTTABRÉF

Íslenska stærðfræðafélagsins

1. tbl. 1. árg. April 1989

$$\pi = 3,14159265358979\ldots$$

$$\pi = \frac{22}{7} - \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$$

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

$$\pi = 2 \Big/ \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \right)$$

$$\pi = 4 \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}}$$

Umsjón með útgáfu: Ragnar Sigurðsson

Fréttabréf Íslenska stærðfræðafélagsins

Póstfang:

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík

Ritstjórn:

Ritstjóri: Ragnar Sigurðsson
Jón Hafsteinn Jónsson
Kristján Jónasson

Efni:

Forsíðan og baksíðan:

Talan π hefur um aldir verið mönnum mikil ráðgáta. Forsíða og baksíða blaðsins eru skreyttar með ýmsum formúlum fyrir π. Það hefur lengi verið íþrótt að ákvarða aukastafina í tugabrotsframsetningu π og þekktum aukastöfum fjölgar ár frá ári eftir því sem tölvur verða hraðvirkari og reikniritin betri. Það hefur einnig verið íþrótt að finna heiltölubrot sem nálga töluna π. Enginn veit hvernig nálgunin $\frac{22}{7}$ kom til sögunnar, en vitað er með vissu að Arkimedes sannaði að $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Með tilkomu stærðfræðigeiningarinnar fundu menn ótal formúlur fyrir π. Flestar þeirra eru fengnar með því að reikna út ákveðin heildi, Taylor–raðir, Fourier–raðir eða leifasummur. Ekki vitum við hvernig heildið í annari formúlu á forsíðu er til komið. Þriðja formúlan er kennd við *Wallis*, sú fjórða við *Viète* og sú fimmta við *Brouncker*. Fyrri formúlan á baksíðunni er kennd við *Leibniz*. Hún er fengin með því að stinga tölunni 1 inn í Taylor–röðina fyrir fallið arctan í punktinum 0. Seinni formúlan er fengin með því að leysa π út úr formúlunni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Gildi summunnar er unnt að ákvarða með leifareikningi.

Robert Magnus sá um hönnun á útliti blaðsins.

ÁSKORUN

Lesandi góður! Um nokkurra ára skeið höfum við rætt um að koma af stað útgáfu á tímariti á vegum Íslenska stærðfræðafélagsins. Ýmsar hugmyndir hafa verið viðraðar, en þær hafa ekki komist til framkvæmda. Á síðasta aðalfundi félagsins var rætt um útgáfumál og stjórninni var falið að skipa nefnd til að sjá um útgáfu tímarits af einhverju tagi. Stjórnarmenn hugleiddu málið, ræddu það fram og aftur, og ákváðu loks að gefa út **Fréttabréf Íslenska stærðfræðafélagsins** og skipa sjálfa sig í ritstjórn þess. Tilgangur þessa fyrsta tölublaðs er fyrst og fremst að koma á framfæri áskorun til allra félagsmanna um að hefjast handa við að skrifa efni í blaðið.

Við viljum að fréttabréfið verði vettvangur, *„þar sem einstakir félagsmenn skýra frá athugunum sínum á stærðfræðilegum viðfangsefnum,“* eins og segir í fundargerð stofnfundar félagsins. Athuganir á stærðfræðilegum viðfangsefnum eru margvíslegar, því stærðfræðin er allt í senn, vísindi, íþrótt og list. Við vonumst til að efnið verði í framtíðinni samtvinnað úr þessum þremur þáttum og að félagsmenn hafi ánægju af því.

Vísindi. Þegar við skorum á félagsmenn að skrifa vísindalegar greinar um stærðfræðileg efni, þá erum við ekki aðeins að hvetja þá sem stunda nám, kennslu og rannsóknir í stærðfræði og skildum greinum að segja frá áhugaefnum sínum á þann hátt að sem flestir geti notið þess. Við erum einnig að hvetja félagsmenn til að viðra hugmyndir sínar um færar leiðir til að auka veg stærðfræðinnar í íslenska skólakerfinu, því stærðfræðin er önnur mikilvægasta greinin í skólum landsins, næst á eftir íslenskunni, og við trúum að það skipti höfuðmáli í framtíðinni að allstór hluti hvers árgangs þjóðarinnar tileinki sér vel viðhorf, aðferðir og hugsanagang stærðfræðinnar.

Íþrótt. Þrautir og leikir skerpa hugsunina og verða vonandi fastur dálkur í hverjum blaði. Við vonumst til að lesendur sendi okkur skemmtilegt efni sem þeir rekast á. Við munum birta verkefni, lausnir og niðurstöður úr öllum stærðfræðikeppnum fyrir framhaldsskólanema, sem félagið stendur að.

List. Við tölum oft um að lausnir á verkefnum í stærðfræði séu fallegar, snotrar og jafnvel snilldarlegar. Allt efni sem sýnir fegurðina og listina í stærðfræðinni er vel þegið.

Jón Hafsteinn Jónsson Ragnar Sigurðsson

FRÁ STJÓRN FÉLAGSINS

„Föstudaginn 31. október 1947, sem er sjötíu ára afmælisdagur Dr. Ólafs Daníelssonar, komu saman á heimili hans nokkrir menn og stofnuðu með sér félag.

Tilgangur félagsins er sá að stuðla að samstarfi og kynnum þeirra manna hér á landi, sem lokið hafa háskólaprófi í stærðfræðilegum greinum.

Félagið heldur fundi, þar sem einstakir félagsmenn skýra frá athugunum sínum á stærðfræðilegum viðfangsefnum, og skulu umræður um efnið fara fram, ef þess er óskað.

Á fyrsta haustfundi ár hvert skal kjósa tvo menn til að sjá um fundina, er skulu haldnir eigi færri en tveir á ári.

Þessir eru stofnendur:

Ólafur Daníelsson
Þ. Þorkelsson
Bolli Thóroddsen
Sigurkarl Stefánsson
Leifur Ásgeirsson
K. G. Guðmundsson
Guðmundur Arnlaugsson
Gunnar Böðvarsson
Brynjólfur Stefánsson
Árni Björnsson
Steinþór Sigurðsson
Trausti Einarsson
Sveinn Þórðarson
Þorbjörn Sigurgeirsson
Björn Bjarnason.“

Þetta er fundargerð stofnfundar Íslenska stærðfræðafélagsins. Það vekur athygli, þegar fundargerðin er lesin, að félaginu var ekki gefið nafn við stofnun þess. Einungis er getið um tilgang félagsins en því voru ekki sett nein lög. Nafn félagsins var ekki ákveðið fyrr en 1952. Lög þess hafa mótast í tímans rás, en þau eru enn óskráð. Stofnfélagarnir eru lögsögumenn félagsins og ungir stjórnarmenn ráða ráðum sínum við þá áður en mikilvægar ákvarðanir eru teknar.

Menn hafa alla tíð gætt þess að hafa starfsemina ekki of formlega og reynt að láta hana ganga fyrir sig án stórátaka. Þetta hefur orðið til þess að ekki ber mikið á því sem gert er. Félagar eru nú ríflega hundrað og starfsemin er blómleg. Töluverður fjöldi félagsmanna tekur virkan þátt í starfsemi félagsins með ýmsum hætti. Mig langar til að rekja hér helstu þættina í starfseminni og nefna þá menn sem sinna hverjum þætti.

Stjórn: Stjórnin sér um að tilgangi félagsins sé þjónað; eins og honum er lýst í fundargerð stofnfundarins. Hana skipa þrír menn:

Ragnar Sigurðsson, formaður,
Jón Hafsteinn Jónsson, ritari, Kristján Jónasson, gjaldkeri.

Orðaskrá: Um árabil hefur félagið staðið fyrir þýðingu á orðum yfir stærðfræðihugtök og söfnun á nýyrðum. Í upphafi ársins 1988 var ákveðið að fjölga mönnum í ritstjórn orðaskrárinnar og halda fundi vikulega. Ritstjórnina skipa:

Reynir Axelsson, ritstjóri,
Kristín Halla Jónsdóttir, Jón Ragnar Stefánsson,
Jón I. Magnússon, Jakob Yngvason,
Guðmundur Arnlaugsson, Robert Magnus,
Kristján Jónasson, Ragnar Sigurðsson.

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema: Síðastliðin fimm ár hefur félagið ásamt Félagi raungreinakennara í framhaldsskólum staðið fyrir stærðfræðikeppni framhaldsskólanema. Við tölum oft um þetta sem eina keppni, en í rauninni eru keppnirnar þrjár, landskeppni, norræn Ólympíukeppni og alþjóðleg Ólympíukeppnin. Í undirbúningsnefnd fyrir hönd félagsins eru:

Jón I. Magnússon, formaður,
Eggert Briem, Robert Magnus.

Alþjóðlegt samstarf: Félagið tilheyrir Alþjóðasambandi stærðfræðafélaga og tekur þátt í samstarfi evrópskra og norrænna stærðfræðafélaga. Þeir menn sem taka þátt í þessu starfi fyrir hönd félagsins eru

Robert Magnus,
fulltrúi í samstarfsverkefninu Euromath.
Halldór I. Elíasson,
fulltrúi í ritstjórn Mathematica Scandinavica,
Eggert Briem,
fulltrúi í ritstjórn Nordisk Matematisk Tidskrift.
Sven Þ. Sigurðsson,
fulltrúi í ritstjórn BIT, Tidskrift for InformationsBehandling.

Ragnar Sigurðsson

FUNDARBOÐ

Miðvikudaginn 26. apríl verður haldinn fundur í Íslenska stærðfræðafélaginu. Hann verður haldinn í Tæknigarði, nýbyggingunni við hlið Raunvísindastofnunar, og hefst kl. 17.15. Fyrir fundinn verður kaffidrykkja að venju og hefst hún klukkan 16.45. Gestur okkar á fundinum verður Johan Aarnes, prófessor við Háskólanum í Þrándheimi. Hann hefur valið efni úr talnafræði, sem öllum félögum ætti að finnast áhugavert:

Selbergs traseformel og Riemanns hypotese

Fyrirlesturinn verður haldinn á ensku, en við gefum hér fyrirlesaranum orðið á móðurmáli sínu:

„*Det som idag omtales som traseformelen ble først publisert i et arbeid av Atle Selberg for vel 30 år siden. I dag er interessen for og aktiviteten rundt denne formelen større enn noensinne. En årsak er antagelig at et fullstendig bevis her er meget komplisert, og at formelen nærmest tjener som møtested for en rekke ulike matematiske disipliner: partielle differensiallignigner og egenverdiproblemer på Riemann-flater, representasjonsteori for Lie grupper, studiet av automorfe former, kompleks funksjonsteori og analytisk tallteori. Spesiell har forbindelsen til Riemanns hypotese og fordelingen av primtall virket fasinerende på mange. Anvendelse av formelen og den såkalte Selbergs ζ-funksjon skjer idag på en rekke tilsynelatende ubeslektede felter, og man er lang fra å ha full oversikt og forståelse.*

På denne bakgrunn kan det virke nesten formastelig å prøve å gi et bilde av hva dette handler om i et enkelt foredrag, ikke minst når man tar forelesernes egne begrensninger: Vi vil prøve å skissere hvordan traseformelen konstrueres, hva dens enkelte bestanddeler betyr og kaste et blikk på dens klassiske forløpere. Vi vil deretter betrakte forbindelsen med tallteori og Riemanns hypotese“.

Þess má til gamans geta að bókin **Matematikk i vår tid** eftir Jon Reed og Johan Aarnes, var um árabil verðlaunabók Stærðfræðafélagsins til nýstúdenta.

„ORÐ MÉR AF ORÐI“

Vinna við Orðaskrá Íslenzka stærðfræðafélagsins hefur staðið frá árinu 1973, að vísu með talsverðum töfum og gloppum eins og gengur, og stundum verðum við sem að henni vinnum þess vör að nokkurrar óþreyju er farið að gæta hjá þeim sem vilja sjá einhvern afrakstur þessa verks. Um nokkra hríð hefur ritstjórn Orðaskrárinnar fundað vikulega, og starfinu miðar áfram hægt og bítandi. Segja má að Orðaskráin sé þegar orðin talsvert viðamikil, og nú eru til íslenzk orð yfir langflest af þeim hugtökum sem notuð eru í stærðfræðikennslu allt upp í háskóla. Samt sem áður vantar ennþá orð um ýmis algeng hugtök. Í þessum stutta pistli ætla ég að viðra sumar af þeim uppástungum sem ritstjórnin hefur verið að velta fyrir sér að undanförnu og leggja fyrir lesendur spurningar um þýðingar nokkurra orða sem enn valda okkur heilabrotum. Af nógu er að taka, og ég gríp eftirfarandi dæmi meira og minna af handahófi. Þar sem ætlunin er að gefa fyrst út ensk- íslenzkt orðasafn mun ég rita erlendu heitin á ensku.

Lýsingarorðin *elliptic*, *parabolic* og *hyperbolic* hafa lengi verið til vandræða. Jónas Hallgrímsson bjó til nýyrði yfir keilusniðin í þýðingu sinni á *Stjörnufræði* Ursins (1842). Sem kunnugt er notaði hann orðið *sporbaugur* fyrir *ellipse*, *fleygbogi* fyrir *parabola* og *breiðbogi* fyrir *hyperbola*. Þessi orð eru enn notuð, en sumir hafa einnig notað orðið *gleiðbogi* í stað *breiðbogi*. Vandinn við að þýða lýsingarorðin er sá að þau eru ekki alltaf dregin af nöfnum keilusniðanna, heldur af upphaflegri merkingu grísku orðanna. *Ellipse* kemur t. d. af gríska orðinu *elleipsis*, sem þýðir *skortur* eða *vöntun*, og orðið *ellipsis* er til í ensku og t. d. notað um úrfellingu eða gloppu í texta. Eins er *hyperbola* dregið af grísku sögninni *hyperballein*, að kasta of langt, kasta yfir markið, og orðið *hyperbole* lifir í ensku og er notað um ýkjur. Orðasamböndin *elliptic geometry*, *parabolic geometry*, *hyperbolic geometry* eru væntanlega til komin vegna þess að fyrir gefinn punkt utan við gefna línu er engin lína til gegnum punktinn samsíða gefnu línunni ef rúmfræðin er *elliptic* (skortur á samsíða línum), til er nákvæmlega ein ef hún er *parabolic* (réttur fjöldi), en óendanlega margar ef hún er *hyperbolic* (of margar samsíða línur). Hér eru orðin því ekki dregin af nöfnum keilusniðanna. Stundum má þó finna frændsemi við keilusniðin, þótt lengi þurfi að leita. T. d. er *elliptic curve* svo nefnd vegna þess að „elliptískir ferlar“ tengjast „elliptískum heildum“.

og „elliptísk heildi“ eru svo nefnd vegna þess að eitt þeirra kemur upp þegar reikna þarf bogalengd sporbaugs. Orðin *elliptic*, *parabolic* og *hyperbolic* eru víða notuð og í ólíku samhengi, en það mundi valda vandræðum að þýða þau með ólíkum orðum eftir samhengi. Því viljum við finna eitt orð fyrir hvert þeirra sem megi nota alls staðar. Okkur hefur helzt dottið í hug að nota forskeytin *spor-*, *fleyg-* og *breið-* og skeyta við einhverjum seinni hluta sem er eins hlutlaus og frekast má vera. Þannig finnst okkur að orðin *sporbjúgur*, *fleygbjúgur*, *breiðbjúgur* og *sporlaga*, *fleyglaga*, *breiðlaga*, sem stundum hafa heyrzt, gefi um of til kynna að verið sé að tala um lögun, og það færi t. d. illa að tala um *sporbjúga* eða *sporlaga* ferla, en þeir eru hvorki *sporbjúgir* né *sporlaga*. Okkur hefur því komið til hugar að nota orðin *sporger*, *fleygger* og *breiðger*. Hafa lesendur betri hugmynd?

Vel hefur gengið að finna orð yfir algengustu gerðir falla. *Continuous function* er til dæmis *samfellt fall*, *differentiable function* er *deildanlegt* eða *diffranlegt fall*, *smooth function* (þ. e. óendanlega oft deildanlegt fall) er *þjált fall*, *analytic function* er *fágað fall* (nánar: *real analytic function* er *raunfágað fall*, *complex analytic function* er *tvinnfágað fall*). En ein mikilvæg gerð falla hefur staðið af sér allar tilraunir til að finna heppilegt orð; geta lesendur fundið góða þýðingu á *harmonic function*, og getur einhver upplýst okkur um hvers vegna slík föll bera þetta nafn á erlendum málum?

Orðið *normal* er eitt af þeim orðum sem stærðfræðingar virðast nota hvenær sem þeim dettur ekkert betra í hug. Það kemur fyrir í margvíslegu samhengi. Hér eru nokkur dæmi:

Normal convergence. Hér er lýsingarorðið dregið af nafnorðinu *norm*, sem hefur verið þýtt sem *staðall*, svo að *staðalsamleitni* er eðlileg þýðing.

Normal distribution. Slík dreifing hefur oft verið kölluð *normaldreifing* á íslenzku, en mörgum finnst það engin íslenzka vera. Einnig hefur verið talað um *Gauss-dreifingu*, en kannski mætti finna gegnsærri þýðingu?

Normal family hefur verið nefnd samrýnd fjölskylda.

Normal form kemur víða fyrir, t. d. í *normal form of a matrix*. Gott væri að hafa þýðingu sem dugar sem víðast.

Normal matrix. Hér vantar tillögur.

Normal subgroup, einnig kallað *invariant subgroup*, *distinguished subgroup* eða *self-conjugate subgroup*. Reynt hefur verið að þýða orðasambandið *in-*

variant subgroup og tala um *óbreytta* eða *óbrigðula hlutgrúpu.* Í Galois-kenningu er hugtakið hins vegar nátengt hugtakinu *normal field extension*, og helzt þyrfti orð sem nota má á báðum stöðum. Við biðjum um tillögur.

Normal topological space. Hér vantar einnig tillögur.

Orðin *congruence* og *congruent* í rúmfræði hafa aldrei fengið verulega góða þýðingu. *Congruent figures* hafa verið nefndar *eins myndir* eða *aljafnar myndir*, en hvorugt virðist nógu gott. Nýlega var stungið upp á orðinu *samsniða* fyrir congruent. Hvernig lízt lesendum á það? Hafa þeir betri tillögur? Og hvernig á að þýða *directly congruent* og *oppositely congruent*?

Annað algengt orð úr einfaldri rúmfræði sem enn vantar góða þýðingu á er *construction*, og það kemur raunar víðar fyrir í stærðfræði. Í orðasambandinu *construction by ruler and compass* hefur verið notazt við þýðinguna *teikning með hringfara og reglustiku*, en orðið teikning virðist varla ganga sem þýðing á *construction* í hvaða samhengi sem er. Helzt þyrfti jafnframt að mega nota samstofna orð sem þýðingu á lýsingarorðinu *constructive*, eins og í orðasambandinu *constructive existence proof*.

Ýmis orð úr rökfræði hafa valdið miklum heilabrotum, eins og við á. Nefna má orðin *conjunction* og *disjunction*, sem eru algjör undirstöðuhugtök í þeim fræðum, en virðast ekki hafa fengið góð nöfn á íslenzku. Ekki alls fyrir löngu var stungið upp orðunum *ogun* fyrir *conjunction* og *eðun* fyrir *disjunction*, en þau virðast ekki hafa hlotið almenna hylli. Dettur einhverjum eitthvað betra í hug?

Páll Bergþórsson stakk fyrir fáeinum árum upp á þýðingunni *vigur* fyrir *vector*, og virðist það vera að ná almennri hylli. En hvernig á þá að þýða orðið *tensor*? Nýleg uppástunga er að nota orðið *þinur*. Þá væri *tensor product* þýtt sem *þinfeldi*.

Discrete mathematics er víða að ryðja sér til rúms, enda tengt tölvunarfræði. Nýleg tillaga um þýðingu á *discrete* er *strjáll*. *Discrete mathematics* yrði þá *strjál stærðfræði*, *discrete probability distribution* yrði *strjál líkindadreifing*, *discrete programming* yrði *strjál bestun*, *discrete time* yrði *strjáll tími* o. s. frv. En hefur kannski einhver lesandi betra orð en *bestun* fyrir *programming* eða *optimization*?

Fallið $f(x) = e^x$ er virðulegasta fall í stærðfræði; á ensku kallast það *exponential function*. Það var lengi vel kallað *veldisfall*, en nú er víða tekið að nota orðið *veldisfall* fyrir miklu ómerkilegra fyrirbæri, nefnilega fyrir föll af gerðinni $f(x) = x^n$, sem eru stundum kölluð *power functions* á ensku, þá sjaldan sem menn þurfa á nafni að halda fyrir þau. Nú má segja að orðið *veldisfall* hafi verið frekar vafasöm þýðing á *exponential function*, og eðlilegra hefði verið að kalla það *veldisvísisfall*, þótt sú orðmynd sé raunar talsvert þunglamalegri en hin. En til að forðast rugling við *power functions* er líklegt að það verði samt ofan á.

Factorial number hefur verið kallað *hrópmerkt tala*, og „5!" hefur verið lesið „fimm hrópmerkt". Það er hins vegar galli á þýðingunni að til er annar ritháttur fyrir slíkar tölur sem notar ekki upphrópunarmerki, enda er undarlegt að skíra hugtakið eftir ritháttinum, því að töluna 5! má einnig skrifa sem 120. Því hefur komið fram sú tillaga að nota orðið *aðfeldi*. Talan 5! eða 120 er þá aðfeldi tölunnar 5.

Við látum þessar fregnir frá ritstjórn Orðaskrár Stærðfræðafélagsins nægja að sinni. En við biðjum lesendur að láta okkur vita ef þeir finna góðar þýðingar á einhverjum stærðfræðiorðum.

Reynir Axelsson

STÆRÐFRÆÐIKEPPNI FRAMHALDSSKÓLANEMA VETURINN 1988–1989

Hin árlega Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 1988–1989 var haldin í fimmta skipti núna í vetur. Það eru Íslenska stærðfræðafélagið og Félag raungreinakennara í framhaldsskólum sem standa að keppninni. Keppnin er í tveimur hlutum. Fyrri hluti keppninnar er haldinn á haustin og þá fá allir framhaldsskólanemar landsins að vera með og spreyta sig á prófi sem fer samtímis fram í öllum framhaldsskólum landsins. Fyrri hlutinn er í tveimur stigum: neðra stigi, sem ætlað er nemendum á fyrri tveimur árum framhaldsskólanna, og efra stigi, sem ætlað er nemendum á seinni tveimur árum framhaldsskólanna. Síðari hluti keppninnar er haldinn seinni hluta vetrar. Til hans er eingunis boðið þeim sem best stóðu sig á fyrri hlutanum.

Fyrri hluti keppninnar í ár fór fram 30. október 1988. Alls tóku 360 nemendur frá 18 skólum þátt í keppninni, þar af voru 169 nemendur á efra stigi og 191 nemandi á neðra stigi. Síðari hluti keppninnar var haldinn laugardaginn 1. apríl 1989 í Háskóla Íslands. Til hennar var boðið 20 efstu keppendum af efra stigi og 10 efstu keppendum af neðra stigi fyrri hlutans, og 25 þeirra mættu til leiks. Dómnefnd ákvað að veita þremur efstu keppendum peningaverðlaun: 25 þúsund krónur fyrir fyrsta sæti, 15 þúsund krónur fyrir annað sæti og 10 þúsund krónur fyrir þriðja sæti.

Í níu efstu sætunum voru:

1. Guðbjörn Freyr Jónsson, Menntaskólanum á Akureyri.
2. Halldór Árnason, Menntaskólanum í Reykjavík.
3. Agni Ásgeirsson, Menntaskólanum í Reykjavík.
4. Halldór Pálsson, Menntaskólanum í Reykjavík.
5. Yngvi Þór Sigurjónsson, Menntaskólanum í Reykjavík.
6. Ásta Kristjana Sveinsdóttir, Menntaskólanum í Reykjavík.
7. Hrafnkell Kárason, Menntaskólanum við Sund.
8. Ólafur Örn Jónsson, Fjölbrautaskóla Suðurnesja.
9. Kristján Leósson, Menntaskólanum í Reykjavík.

Níu efstu keppendunum var síðan boðið að taka þátt í þriðju Ólympíukeppni Norðurlanda í stærðfræði, en hún var haldin í skólum keppenda 10. apríl 1989. Íslendingar sáu nú um þá keppni í fyrsta sinn. Ekki er búið að ganga frá úrslitum í keppninni og munum við segja frá þeim síðar.

Daginn eftir lokakeppnina var haldið hóf fyrir keppendur og aðstandendur keppninnar í Skólabæ, þar sem verðlaun voru afhent. Menntamálaráðherra Svavar Gestsson kom í hófið og flutti stutt ávarp. Hann lýsti yfir ánægju sinni með stærðfræðikeppnina og stuðningi stjórnvalda við hana. Hann sagði að nýlegar úttektir á stöðu stærðfræðinnar í skólum landsins sýndu að víða væri þekkingu nemenda ábótavant og mikið skorti á að vel menntaðir stærðfræðikennarar störfuðu við skólana. Hann sagðist vonast til að keppnin yrði til þess að áhuginn á faginu efldist og að einhverjir úr hópi keppenda leggðu fyrir sig stærðfræðikennslu. Ráðherra sagði einnig frá því að nýlega hefði fé verið veitt til að standa straum af námskeiðum í stærðfræði fyrir framhaldsskólakennara og myndi stærðfræðiskor raunvísindadeildar Háskólans efna til þeirra.

Þegar Menntamálaráðherra hafði lokið máli sínu flutti Eggert Briem ávarp, sem hann hefur góðfúslega leyft okkur að birta:

„Virðulegi menntamálaráðherra, ágætu forstjórar, kæru keppendur og aðrir gestir.

Við erum komin hér saman til að halda upp á úrslitin í stærðfræðikeppni framhaldsskólanema og afhenda sigurvegurunum verðlaun.

Þetta er 5. árið í röð að þessi keppni er haldin. Það eru Íslenska stærðfræðafélagið og Félag raungreinakennara í framhaldsskólum sem standa að keppninni. Keppnin fer þannig fram, að á haustin er haldin landskeppni í stærðfræði, í tveim stigum, fyrir neðri bekki framhaldsskóla og fyrir efri bekki framhaldsskóla. 20 efstu af efra stigi og 10 efstu af neðra stigi fá síðan sérstaka þjálfun í nokkra mánuði. Þessir nemendur fá send verkefni til úrlausnar. Úrlausninrnar eru sendar til okkar, sem að keppninni standa og nemendurnir fá síðan úrlausnirnar leiðréttar til baka, ásamt lausnum okkar á verkefnunum. Okkar lausnir eru ekki alltaf fallegustu lausnirnar; oft fáum við lausnir sem eru skemmtilegri en þær sem okkur kennurunum detta í hug. Þessir 30 nemendur þreyta síðan lokakeppni en úrslitum hennar erum við hér að fagna.

Þessu er samt ekki lokið. Mánudaginn 10. apríl fer fram norræn keppni í framhaldsskólunum. Hópur þeirra sem bestum árangri ná í þessari keppni tekur þátt í norrænu keppninni. Í ár eru það við hér á Íslandi sem göngumst fyrir norrænu keppninni. Eftir árangrinum í keppninni sem fram fór í gær og í norrænu keppninni er valinn hópur sem fær sérstaka þjálfun fyrir Olympíukeppnina í stærðfræði sem í ár fer fram í Þýskalandi.

Til hvers erum við að þessu öllu saman? Til að auka áhuga á stærðfræðinni, kveikja áhuga þar sem enginn er og blása í glæðurnar þar sem einhver áhugi er fyrir.

Verkfræðingar hafa jafnan sýnt stærðfræði mikinn áhuga, en stærðfræði er ein af undirstöðugreinunum á fyrstu árum í verkfræðinámi. Áhugi þeirra kemur líka fram í verki. Tvö fyrirtæki sem um margt byggja á verkfræðikunnáttu, Ístak hf. og Steypustöðin hf. hafa borið allan kostnað af *þessari keppni og það eru fulltrúar þessara fyrirtækja verkfræðingarnir Páll Sigurjónsson og Ágúst Valfells sem munu afhenda verðlaunin hér á eftir.*

Stærðfræði er ein helsta kennslugreinin í framhaldsskólunum. Menntamálaráðuneytið hefur sýnt því framtaki Íslenska stærðfræðafélagsins og Félags raungreinakennara, að gangast fyrir keppni og þjálfun í stærðfræði, mikinn áhuga og hefur stutt vel við bakið á okkur, sem stöndum í þessu. Meðal annars er þess vænst að fleiri fái nú áhuga á stærðfræðikennslu en skortur á stærðfræðikennurum er mikill hér á landi. Sömu sögu er að segja í fjölmörgum nálægum löndum. Þegar ég var að hefja stærðfræðinám í Danmörku var það næst heitasta ósk allra samstúdenta minna að verða menntaskólakennari. Heitasta óskin var að verða menntaskólakennari og giftast menntaskólakennara. Núna eru aðrar óskir ofar á listanum að því er virðist. En þetta á kannske eftir að breytast.

Ég vil að lokum þakka þeim sem hafa borið hitann og þungann af allri framkvæmd keppninnar og þjálfuninni, en síðast en ekki síst vil ég þakka ykkur þátttakendur góðir fyrir að hafa mætt til leiks og lagt á ykkur allt þetta erfiði. Ég vona að þessi vinnugleði ykkar sé bráðsmitandi og breiðist óheft út um allt.“

Þegar Eggert hafði lokið máli sínu voru verðlaunin afhent. Síðan þáðu gestir veitingar í boði félaganna tveggja og sátu síðan að spjalli nokkra stund.

Í lokakeppninni voru 6 dæmi og fengu keppendur fjórar klukkustundir til að leysa þau. Við hvetjum alla lesendur blaðsins að reyna sig við dæmin. Lausnirnar er að finna á síðum 17 – 19.

Úrslitakeppni

1. Við segjum að margliða $p(x)$ hafi lárettan sniðil af lengd a (> 0) ef til er tala x þannig að $p(x+a) = p(x)$. Sýnið, að margliðan

$$p(x) = x^3 - x$$

hafi lárettan sniðil af lengd a ef og aðeins ef $0 < a \leq 2$.

2. Látum p og q vera tölur, þannig að $p > 0$, $q > 0$ og $p + q = 1$. Sýnið að

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

3. Látum $n \geq 1$ vera heila tölu. Sýnið að talan $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ er ekki kvaðrat (þ.e.a.s heil tala í öðru veldi).

4. Látum ΔABC vera jafnarma þríhyrning með $AB = AC$. Innritaði hringurinn snertir hliðina AB í punktinum D og hliðina AC í punktinum E. Drögum snertil við innritaða hringinn samsíða DE og látum F og G tákna skurðpunkta hans við hliðarnar AB og AC. Sýnið að

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{FG} + \frac{1}{BC}\right).$$

5. Blómasali nokkur ætlar að búa til n þriggja blóma vendi þannig að annað hvort séu þrjár mismunandi tegundir blóma í hverjum vendi eða öll $3n$ blómin séu sömu tegundar. Sýnið, að þetta getur hann gert ef hann hefur $7n$ blóm til umráða.

6. Látum x_0 og x_1 vera gefnar tölur og skilgreinum runu af tölum með

$$x_n = \frac{x_{n-2} \cdot x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \qquad \text{ef} \qquad n \geq 2.$$

Ef $2x_{n-2} - x_{n-1} = 0$, þá stoppar runan í x_{n-1}. Finnið öll möguleg gildi á x_0 og x_1 þannig að óendanlega margar heilar tölur komi fyrir í rununni.

NORMAT

Nordisk matematisk tidskrift eða **Normat** eins og það er skammstafað er samnorrænt tímarit sem gefið er út af stærðfræðafélögunum og félögum stærðfræðikennara á Norðurlöndum. Normat reynir að höfða til sem flestra, sem einhvern áhuga hafa á stærðfræði. Í því er fjallað um gamlar og nýjar stærðfræðikenningar og vandamál, en það er einnig vettvangur umræðna um fjálft fagið stærðfræði og sögu þess. Efni þess má flokka í grófum dráttum sem hér segir:

* Yfirlitsgreinar um hin ýmsu svið stærðfræðinnar og beitingu hennar við lausn margvíslegra verkefna.

* Greinar með efni úr sögu stærðfræðinnar.

* Æviágrip þekktra stærðfræðinga.

* Greinar um stærðfræðikennslu og stærðfræði í grunn- og framhaldsskólum.

* Stuttar greinar um eigin uppgötvanir.

* Bókaþáttur

* Frásagnir af uppgötvunum í stærðfræði sem marka tímamót.

* Dæmadálkur.

Eggert Briem er í ritstjórn Normat tilnefndur af Íslenska stærðfræðafélaginu og geta menn snúið sér til hans með greinar til birtingar. Í auglýsingunni hér á næstu síðu er að finna upplýsingar um áskrift að Normat. Athugið að nú er hægt að greiða erlenda gíróseðla á öllum pósthúsum.

Lausnir á dæmunum í úrslitakeppninni

1.

$$p(x+a) = (x+a)^3 - (x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 - x - a$$

Þá fæst að $p(x+a) = p(x)$ ef og aðeins ef

$$3ax^2 + 3a^2x + a^3 - a = 0.$$

Þessi jafna hefur rauntölulausn þá og því aðeins að aðskiljan (diskriminantinn)

$$(3a^2)^2 - 4 \cdot 3a(a^3 - a) = -3a^4 + 12a^2$$

sé jákvæð eða 0. Það er aftur jafngilt því að $a^2(a^2 - 4) \leq 0$. En þetta er jafngilt $0 < a \leq 2$, því $a > 0$ var skilyrði.

2. Þekkt er ójafnan $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ þar sem $a, b \in \mathbb{R}_+$. Ef við beitum henni, þá fæst

$$\begin{aligned}
(p + \frac{1}{p})^2 + (q + \frac{1}{q})^2 &\geq \frac{1}{2}(p + \frac{1}{p} + q + \frac{1}{q})^2 \\
&= \frac{1}{2}(p + q + \frac{p+q}{pq})^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{pq})^2 \\
&\geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

Hér höfum við notað að $\dfrac{1}{pq}$ verður minnst 4 (ef $p = q = 1/2$).

3. Við höfum

$$\begin{aligned}
n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 &= n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) \\
&= (n^2 + 1)(n^2 + 2n + 1) = (n^2 + 1)(n + 1)^2.
\end{aligned}$$

Þar sem þátturinn $(n+1)^2$ er kvaðrat en þátturinn $n^2 + 1$ er ekki kvaðrat, fæst niðurstaðan sem um var beðið.

4. Fyrst $AB = AC$, þá eru strikin BC og DE samsíða. Skilgreinum nú lengdirnar

$$a = \frac{1}{2}BC = BD,$$

$$b = \frac{1}{2}FG = FD,$$

og

$$c = \frac{1}{2}DE.$$

Nú fæst

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a-c}{a} = \frac{c-b}{b},$$

en af því leiðir

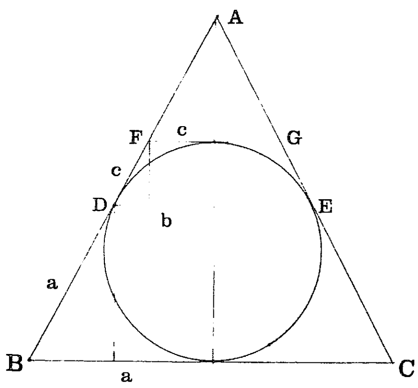
$$1 - \frac{c}{a} = \frac{c}{b} - 1,$$

sem jafngildir

$$2 = c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}).$$

Niðurstaðan er því

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{FG} + \frac{1}{BC}\right).$$



5. Hugsum okkur að við höfum n blómavasa, sem raðað er í hring. Við byrjum á að taka öll blómin af einhverri tegund, stingum einu blómi í einn vasann, veljum okkur umferðarstefnu, setjum svo eitt blóm í næsta vasa og þannig koll af kolli þar til öll blómin af þessari fyrstu tegund eru komin í vasana. Þá er næsta tegund tekin og raðað í vasana þar sem frá var horfið. Þannig er gengið á tegundirnar þar til öll blómin eru komin í vasana, sjö í hvern. Ef blóm af einhverri tegund eru $3n$ eða fleiri, þá eru að minnsta kosti þrjú eins blóm í hverjum vasa. Við getum því tekið fjögur blóm úr hverjum vasa, þannig að eftir standi n þriggja blóma vendir með öll blómin af sömu tegund. Ef blóm af hverri tegund eru færri en $3n$, þá eru í mesta lagi verið þrjú blóm af sömu tegund í vasa. (Til dæmis: þrír fíflar, þrjár sóleyjar og ein baldursbrá, eða þrír fíflar, tvær rósir og tvær baldursbrár.) Nú eru samtals sjö blóm í vasa svo við höfum að minnsta kosti þrjú mismunandi blóm í hverjum. Við getum því tekið fjögur blóm úr hverjum vasa þannig að eftir standi n þriggja blóma vendir og í hverjum þeirra séu öll blómin af mismunandi tegundum.

6. Gerum ráð fyrir að óendanlega margar heilar tölur komi fyrir í rununni. Þá er $2x_{n-2} - x_{n-1} \neq 0$ fyrir öll n. Væri ${}_n = 0$ fyrir eitthvert n, yrði x_{n+1} annað hvort óskilgreint eða 0 og í báðum tilfellunum yrði runan endanleg. Því gildir $x_n \neq 0$ fyrir öll n og

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}},$$

sem jafngildir

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Runan $y_n = 1/x_n$ er því jafnmunaruna (mismunaruna). Köllum mismuninn milli liðanna d. Ef $d > 0$, þá fæst að $y_n \to +\infty$ og $x_n \to 0$ og ekki fást óendanlega margar heilar tölur í rununni x_n. Hliðstætt má sjá að talan d getur ekki verið neikvæð tala. Þá gildir að $d = 0$, svo $y_n = y_{n-1}$ og því jafnframt $x_n = x_{n-1}$ fyrir öll n. Skilyrði þess að óendanlega margar heilar tölur komi fyrir í rununni x_n hlýtur að vera að $x_0 = x_1$, og að þessi tala sé heil tala og ekki 0.

Viðtakandi:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right)$$

$$\pi = \sqrt{6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)}$$

Íslenska stærðfræðafélagið
Raunvísindastofunun Háskólans
Dunhaga 3
IS – 107 Reykjavík