Viðtal við Sigurð Helgason
Seinni hluti

Um jólin 1999 tóku Robert Magnus og Ragnar Sigurðsson viðtal við Sigurð Helgason þar sem hann sagði frá ferli sínum sem stærðfræðingur. Þar kemur margt fram, m.a. um menntun hans allt frá unglingsárunum, um það hvernig áhugi hans á stærðfræði vaknaði, um verkefni sem hann hefur fengist við gegnum árin og um stærðfræðinga sem hann hefur kynnst. Þetta er seinni hlutinn.

RM: En komum núna að diffurrúmfræðinni. Þú er mjög þekktur fyrir diffurrúmfræði.

SH: Nei, það er of mikið sagt. En ég hef alltaf haft mikinn áhuga á allri geómetríu. Seinna bindi Jessen í geómetríu er um diffurrúmfræði í þremur víddum. Þar er allt saman mjög fágað og mjög nákvæmt. Þegar ég var búinn að ljúka mínu prófi í janúar 1952, þá fór ég að lesa bækur eins og fyrsta bindi af bókum Blaschke. Það er mjög interessant bók, en sjúskuð miðað við það sem maður var vanur frá Jessen. Síðari útgáfur af bók Blaschke eru mun betri. Svo hélt ég lengra og fór að lesa Eisenhart *Riemannian Geometry*. Þar er eins og geómetrían sé horfin og eftir eru bara tensorformúlur, þannig að ég missti frekar áhugann. Svo var það ekki fyrr en seinna að ég fór fyrir alvöru að stúdera diffurrúmfræði af meiri áhuga.

RS: Það er á Princeton-árunum, er það ekki?

SH: Það er eiginlega eftir að ég kom frá Princeton, þegar ég kom til MIT. Þá var diffurrúmfræði að koma dálítið í tísku. Ég hitti þar John Nash. Hann var góður vinur minn. Hann var einmitt búinn að sanna hina frægu setningu sína um „isometric imbedding".

RS: Við skulum nefna hver þessi setning er.

SH: Já, það er setning eftir Whitney sem segir að sérhverja víðáttu má leggja inn í evklíðskt rúm af kannske hárri vídd. Spurning Nash var: Er hægt að gera þetta þannig að metrikin á víðáttunni sem er gefin fyrirfram, sé sú sama og sú sem kemur frá evklíðska rúminu? Þetta hafði hann nýlega sannað þegar ég kom til MIT. Svona sjónarmið komu aldrei fram í Eisenhart. Þar voru alltaf bara þessi „débauche des indices" eins og Cartan orðaði það. En eftir að maður hefir kynnt sér Riemann-geómetríu er mikið gagn í útreikningum hjá Eisenhart.

RS: Það sem ég hef lesið um þessa sönnun Nash segir að hann sanni þetta bara berum höndum. Hann notar mjög litla tækni, er það ekki?

SH: Ég hef nú aldrei stúderað þá sönnun, satt að segja, enda hafa menn nú gert hana talsvert einfaldari síðan. Til dæmis Mathias Günther í Leipzig hefur komið með miklu einfaldari sönnun. En þetta er samt dálítið tyrfið.

RM: Er þetta ekki það sem síðar leiddi til þess sem kallað er „Nash smoothing technique“?

SH: Já, Moser notaði svipaða tækni við önnur próblem. Mönnum tókst nú að melta þetta, en það þurfti talsvert átak og það var nú eiginlega Federer sem fór í gegnum handritið og gerði það læsilegt.

RS: Unnuð þið John Nash eitthvað saman?

SH: Nei, en við töluðum mikið saman um stærðfræði. Við höfðum frekar ólík áhugamál. Ég fór ekki út í diffurrúmfræði af þessum ástæðum. Ég hélt áfram því sem ég fékkst við í Princeton. Það er að segja, þessi setning um næstum lotubundin föll var um abelskar grúpur, en þegar maður fer út í Lie-grúpur, þá eru þær grúpur miklu skemmtilegri sem eru ekki abelskar. Þá er analýsan allt öðruvísi. Þá er maður kominn út í óendanlegar víðar framsetningar, „representationir“. Þá fór ég að taka eftir greinum Harish-Chandra. Fyrstu greinar hans komu út kringum 1950. Þær voru náttúrlega um Lie-grúpur og þá setti ég mig inn í það efni með því að lesa bók Chevalleys. Þá tók ég eftir því að það var dálítið samband milli þess sem Harish-Chandra var að gera og þess sem Elie Cartan hafði gert. Þegar ég fór að líta í verk Cartans, þá sá ég að það var fullt af geómetríu þar, en allt óskiljanlegt. Á einum stað í bók frá 1951 skrifar hann: „Það er erfitt að gefa nákvæma skilgreiningu á hugtakinu víðátta. Látum því M vera víðáttu … “. Þannig sá ég að ég þyrfti að setja mig vel inn í diffurrúmfræði.

Harish-Chandra var fremur tortrygginn á geómetríu. Það er aldrei nein geómetría í greinum hans. Ég man alltaf eftir því að þegar ég var að tala við hann seinna um þessa hluti, þá kom á hann efasemdarsvipur þegar ég fór að teikna mynd á töfluna.

RS: Hvar var Harish-Chandra, þegar þú varst að byrja á MIT?

SH: Hann var þá við Columbia. Ég hafði hitt hann einu sinni þegar hann hélt fyrirlestur í Princeton.

RS: Hvað er þessi maður gamall?

SH: Hann er fæddur 1923, þannig að hann var kornungur á þessum árum og upprennandi stærðfræðingur, þó hann hefði byrjað sem eðlisfræðingur. Hann skrifaði doktorsritgerð hjá Dirac í Cambridge [Englandi] og kom eftir nokkur ár til Columbia. Ég hafði sótt um „instructorship“ við Columbia, en tók nú frekar að fara til MIT. Ég hafði fengið vinnu á báðum stöðunum, en sá dálítið eftir því að hafa farið til MIT, þegar ég gerði mér grein fyrir því, að ég hefði gagn af því að vera hjá Harish-Chandra. En hvað um það, ég var við Columbia nokkrum árum seinna og talaði þá mikið við Harish. Eftir tvö ár í Cambridge [Massachussetts], þar sem ég var að setja mig inn í diffurrúmfræði, Lie-grúpur og representationsteóríu Harish-Chandra fyrst og fremst, þá fór ég til Princeton í eitt ár.

RS: Bíddu nú við. Nú þurfum við að fá ártölin á hreint. Þú laukst í Princeton 1954 og svo varstu við MIT 1954–6 sem „instructor". Hvers konar staða er það?

SH: Það er kallað „Moore-instuctorship". Það er fyrsta staða sem menn sækja um eftir doktorspróf. Svo var ég í Princeton 1956–7 sem „lecturer" við háskólann. Þá fór ég að hugsa dálítið um diffurjöfnur á Lie-grúpum af því að þá fannst mér það mjög eðlilegt að reyna að alhæfa setningar um hlutafleiðuvirkja með fastastuðla yfir á „invariant" virkja á Lie-grúpum. Ég held að það hafi verið þá, sem ég alhæfði meðalgildissetningu Leifs, sem er fyrir evklíðsk rúm, yfir í öll riemönnsk einsleit rúm. Leifur er með Laplace-virkjann báðum megin jafnaðarmerkisins. Það sem ég hef er fall af tveimur breytistærðum, en það er sama rúmið á báðum stöðum, og sami virkinn vinstra megin og hægra megin, en vinstra megin verkar hann á fyrri breytuna og hægra megin virkar hann á þá seinni. Þá er hneppi af „invariant" virkjum í staðinn fyrir Laplace-virkjann einan sem Leifur hefur. Ef rúmið hefur nógu mikinn hreyfanleika, þá er það bara einn virki sem er „invariant". Það er Laplace-virkinn og margliður af honum. Þá lítur líkingin út alveg eins og hjá Leifi. Þá alhæfði ég setninguna yfir í þessi rúm.

RS: Yfir hvað eru meðalgildin tekin?

SH: Yfir brautir af kyrragrúpunni, ekki heilar kúlur endilega. Það er ekki bara ein meðalgildisformúla sem maður fær. Þær eru margar. Ef ísómetríugrúpa rúmsins er nógu stór, þá eru brautir kyrragrúpunnar heilar kúlur. Þá er tekið meðaltal yfir heilar kúlur. Ég held að ég hafi sannað þetta, þegar ég var í Princeton. Eftir á skýrði ég Leifi frá þessu og ég sagði honum frá því að ég hefði stúderað greinina hans vandlega til þess að sjá hvort ég fengi ekki einhverjar hugmyndir frá honum. Leifur er með tvær sannanir á setningunni. Það var seinni sönnunin sem gaf mér hugmyndina hvernig ég ætti að fara að. Þá sagði Leifur: „Já, þú getur verið þakklátur Herglotz fyrir það". Upprunalega hafði Leifur bara fyrstu sönnunina, vegna þess að seinni sönnunin þurfti eitthvað meiri forsendur. Herglotz hafði verið lesandi að doktorsritgerðinni og þá hafði Leifur sagt honum frá annarri sönnun. Þá sagði Herglotz: „Þú verður að hafa hana með líka". Þannig kom þetta til. Það var einmitt sú sönnun sem gaf mér hugmyndina.

RM: Þetta var sem sagt árið í Princeton. Síðan varstu tvö ár í Chicago, 1957-9. Þá komum við að tímabilinu þegar þú ferð að skrifa bækur.

SH: Þá var diffurrúmfræði talsvert stunduð, bæði af Chern og öðrum. Chern var í Chicago í mörg ár. Það var líka einn nemandi Cherns þar Joseph Wolf, sem var þá að ljúka sínu námi. Hann, Smale, Spanier, ég, Dick Palais og Chern komum á fót seminari um samhverf rúm. Við tókum allir þátt í þessu eftir bestu getu. Þetta var náttúrlega efni sem var alls ekki aðgengilegt, hvergi til nema hjá Cartan, sem var ákaflega erfitt að lesa, þannig að mikið af tímanum fór í að ræða um Lie-algebrur og Lie-grúpur. Ég sá að það var mikið samband milli þessa verka Cartans og verka Harish-Chandra. Gallinn var bara að hjá Harish-Chandra var engin geómetría. Mig langaði til þess að tengja þetta svolítið saman, þannig að ég ákvað þá í Chigago að skrifa bók um þetta. Ég gerði svona smá uppkast að því sem ég ætlaði að gera og bar þetta undir Chern, sem sagði, „já, já, mér líst vel á það“, en hann sagði að þetta myndi nú ekki verða auðvelt verk og að það myndi taka langan tíma að skýra út sannanir og staðhæfingar Cartans. Svo kom ég til Columbia. Þá gafst mér tækifæri til þess að hafa heils árs kúrsus um Lie-grúpur og þessi bók kom út úr þessum kúrsus að nokkru leyti. Ég var á skrifstofu með Harish-Chandra og við ræddum þessa hluti talsvert mikið og ég lagði allt annað á hilluna á meðan. Svo hélt ég áfram fyrsta árið sem ég kom til MIT. Ég lauk við handritið sumarið 1961. Bókin kom út árið eftir, 1962. Manni varð meira úr verki á þeim árum; þá var lítið um stjórnunarstörf, meðmælabréf eða ritrýningar sem mikill tími fór í síðar. Ég hugsaði ekki um neitt annað. Það var eins gott að ég lauk við handritið rétt áður en sonur minn fæddist!

RM: Og seinna, 1978, skrifar þú líka framhald þar sem þú bætir „Lie-groups“ inn í titilinn.

SH: Já, ég tók eftir því að það fór alveg fram hjá mönnum að þarna var kafli um Lie-grúpur alveg frá byrjun. Aðalmarkmiðið með því að skrifa þessa bók var að fá traustan grundvöll fyrir analysu á Lie-grúpum og samhverfum rúmum. Síðasti kaflinn í þessari bók er um grúputeóretiska greiningu, en hann er frekar ókerfisbundinn.

RM: Alhæfing á setningu Leifs er í seinni bókunum frá 1984 og 1994.

SH: Jú, þar [1984] er hún í sértilfelli með minni forsendum; svo [1994] kemur hún almennt. Eftir 1962, þá hélt ég áfram með analysu á Lie-grúpum, inleiddi meðal annars Radon-varpanir á samhverfum rúmum árið 1963. Ég sá smám saman að ég þyrfti að endurskoða bókina frá 1962 rækilega. Hún er í 10 köflum. Ég tók fyrstu 9 kaflana í þeirri bók og víkkaði hvern kafla talsvert mikið. Níundi kaflinn var flokkunin á samhverfum rúmum og það vildi svo til að Victor Kac hafði fundið nýja aðferð við þessa flokkun og hann kom frá Moskvu til MIT kringum 77, en hafði ekki fengið leyfi til þess að taka neina pappíra með sér. Hernaðarleyndarmál! Við höfðum þá seminar í Lie-grúpufræðum og hann talaði þá um þessar flokkanir. Þá spurði ég: „Ertu ekki til í að skrifa þetta upp og hafa þetta sem hluta af einum kafla í bókinni minni, af því að þessi flokkunaraðferð er svo lítið þekkt?“ Þetta var nokkuð sem hann þurfti að gera eftir minni vegna þess að hann hafði enga pappíra með sér. Hann gaf mér smá uppkast að þessu.

Það varð talsvert verk fyrir mig að fylla í eyðurnar, en það var mikið gagn af að hafa þessa aðferð með pottþéttum sönnunum.

RS: Voru þetta ekki birtar niðurstöður?

SH: Niðurstöðurnar voru birtar á einni eða tveimur síðum bara sem „research announcement", en sjálfar sannanirnar höfðu hvergi komið út. Þetta var nokkuð merkileg sönnun, þannig að það var gott að geta haft þetta með. En það var dálítið erfitt og ég var oft kominn á fremsta hlunn með að hætta við þetta, vegna þess að hann átti erfitt með að rekonstrúera sannanirnar, einnig af því að hann var önnum kafinn við önnur verkefni á meðan. Hann var í dálitlum príoritetsvandræðum við aðra menn. Ég vissi það nú ekki fyrr en á eftir. Þetta tókst nú samt á endanum.

Þá var ég kominn að aðalverkefninu sem var að skrifa bók um geómetríska analysu, sem var mitt aðalrannsóknasvið. Úr því urðu tvær bækur, ein árið 1984 og önnur árið 1994, samtals ca. 1300 síður. Þær byggðust mest á eigin niðurstöðum. Þessar bækur eru í bókaflokki AMS sem heitir *Mathematical Surveys and Monographs*. Sú fyrri hafði áður komið út hjá Academic Press, sem því miður hefir reynst stærðfræðingum illa á síðari árum.

RS: Hvenær kom litla bókin um Radon-vörpunina út?

SH: Hún kom 1980, en 1999 kom ný útgáfa. Það kom til af því að ég fékk áhuga á Radon-vörpunninni dálítið snemma og þar kom Leifur dálítið við sögu. Leifur var í New York 1955 og ég heimsótti hann þarna einu sinni frá Boston. Leifur bjó í húsi Fritz John sem var í kennsluleyfi. Þeir höfðu verið samstúdentar og góðir vinir frá Göttingen. Við vorum alltaf að tala um stærðfræði og þá lánaði hann mér prófarkir að bók Fritz John, sem heitir „Plane Waves and Spherical Means" og þar er Radon-vörpunin með andhverfusetningunni strax í fyrsta kafla. Þetta er ágætis bók. Ég var að lesa þetta í lestinni og ég var alveg steinhissa hvernig í ósköpunum ég hefði komist í gegnum háskólanám í stærðfræði og aldrei heyrt talað um þessa setningu. Þetta er alveg ljómandi falleg setning, en var tiltölulega óþekkt meðal stærðfræðinga. Ég kynnti mér þetta dálítið betur í Boston. Svo þegar ég fór til Chigaco 1957, þá hélt ég dálítið áfram með þetta og ég alhæfði andhverfusetninguna yfir í hýperbólsk rúm. Í staðinn fyrir að Radon tekur plön, þá tek ég „totally geodesic submanifolds" og andhverfusetningin er nokkuð svipuð því sem maður myndi hafa vænst. Svo hélt ég nú einhvern kúrsus kringum 1964, þegar ég var kominn til MIT, sem fjallaði um Radon-vörpunina. Hann var nú ekkert sérstaklega vel sóttur. Nemendur voru ekkert mjög spenntir fyrir þessu þá. Svo kom þessi notkun Cormacks og Hounsfields á Radon-vörpun í læknisfræði og þá var mikill áhugi fyrir þessu allt í einu aftur. Ég hélt kúrsusinn aftur og ýmsir af nemendunum hafa orðið sérfræðingar á þessu sviði, t.d. Todd

Quinto og Fulton Gonzalez báðir við Tufts University.

RS: Hvenær gerist þetta?

SH: Greinar Cormacks eru frá 1963. Hann var eðlisfræðingur við Tufts University, hann er dáinn núna. Dóttir hans, Margaret, hefir talsverð tengsl við Ísland; skrifaði doktorsritgerð um íslenska dýrðlinga. Það voru línur í planinu sem Cormack athugar, því það er í sambandi við Röntgen-geisla sem hann hugsar um þetta. Það var 1965 eða 1966, að hann skrifaði mér bréf af því að hann hafði heyrt af því að ég hefði skrifað grein um Radon-vörpunina, sem kom út í Acta Mathematica 1965. Þá fór hann að spyrja mig hvort það væri til setning sem núna er kölluð stoðarsetning. Þessi setning kemur einmitt fyrir í þessari grein í Acta. Hún er gagnleg í læknisfræði. Setjum svo að við vildum vita hver þéttleiki efnisins í lunganu er en viljum ekki senda Röntgen-geisla í gegnum hjartað sjálft. Þá er eftir stoðarsetningunni hægt að finna þéttleikann í lunganu án þess að fara með Röntgen-geisla gegnum hjartað. Þetta leiðir ekki af andhverfusetningunni. Andhverfusetningin heimtar Röntgen-geisla gegnum alla punkta í allar áttir. Stoðarsetningin sýnir að þetta þarf ekki. Ég held að það sé alveg ómögulegt að finna eina setningu sem inniheldur þessar báðar, vegna þess að forsendurnar eru ekki þær sömu. Þetta var sem sagt það sem Cormack vildi vita. Þá gat ég nú bent honum á þessa grein. Hann sagði: „Já, ég hef að vísu séð þessa grein, en ég er óvanur þessum samþjappaða ritætti stærðfræðinga og ég tók bara ekki eftir þessari setningu".

RM: Þú varst með stoðarsetninguna í greininni?

SH: Já, ég hafði sannað hana 1963. Ég man það svo vel, vegna þess að ég var með kúrsus þar sem þessi setning passaði vel. Ég hafði einmitt sannað þessa setningu í fyrirlestri og svo þegar ég kom út úr kennslustofunni, þá frétti ég um morðið á Kennedy.

RM: Víkjum aftur að stoðarsetningunni. Þú varst ekki með neinar hugmyndir um að hún myndi vera gagnleg í læknisfræði?

SH: Nei, þá var ekki neitt vitað um þetta. Mig minnir að í grein Cormacks sé einhver vísir að notkun í læknisfræði, en þó er ég ekki viss um það. Það þurfti meira til heldur en grein Cormacks. Það var líka Hounsfield, sem sýndi hvernig hægt er að kombinera þetta við tölvu.

RS: Áttu þá við hvernig hægt er að teikna mynd af þéttleikanum?

SH: Já, það er nefnilega hægt að gera. Ég var í sjálfu sér ekki að leita að stoðarsetningunni eingöngu. Ég leit á Radon-vörpunina sem vörpun frá einu fallarúmi yfir í annað. Þá vildi ég vita hvað myndmengið væri. Það er um tvö tilfelli að ræða. Það er fyrst og fremst um að ræða Schwartz-rúmið S. Ég fann myndina af því með því að nota Fourier-vörpun. En svo vill maður líka fá myndina af rúminu $\mathcal{D}$. Til þess að geta það þarf maður stoðarsetninguna. Ef maður hefur stoðarsetninguna og einkenningu á myndmenginu fyrir $\mathcal{S}$, þá kemur myndmengið fyrir $\mathcal{D}$ líka. Þetta fannst mér aðalatriðið.

RM: Það er mjög skemmtilegt, að þú skulir hafa farið að hugsa um þetta vegna hreinnar stærðfræði og þá fær það hagnýtingu í læknisfræði.

SH: Já, það er notalegt ef eitthvað sem maður er að gera skuli fá þýðingu síðar, ekki síður þó það sér hrein tilviljun. Andhverfuformúlan er kennd við Radon frá 1917, en sannleikurinn er sá að Cormack hafði ekki heyrt um Radon árið 1963. Hann hefði náttúrlega getað notað andhverfusetningu Radon, en hann vissi ekkert um hana og það vissu þeir stærðfræðingar heldur ekki, sem hann hafði spurt. Hann segir einhvers staðar í fyrirlestri, að hann hafi haldið að þetta hefði verið gert af Cauchy eða einhverjum samtímamanni hans. Cormack notar því ekki andhverfuformúlu Radons.

RS: Hið eðlisfræðilega vandamál sem Cormack er að skoða er það hvort hægt sé að ákvarða þéttleika í efni út frá því hvernig styrkur geisla dofnar við að honum er skotið í gegnum það. Þetta er mjög eðlilegt eðlisfræðilegt vandamál. Þá koma heildin yfir línurnar inn í myndina.

SH: Já, þetta var einmitt hugmynd Cormacks. Aðferð hans er svo að taka fallið og setja það fram með Fourier-röð. Hann tekur fyrst föll sem eru radial föll svo tekur hann föll sem eru homogen í hornbreytistærðinni af n-tu gráðu. Öll föll má rita sem röð af slíkum og hann finnur andhverfuformúlu fyrir hverja gerð fyrir sig. Það eru tegundir af abelskum heildajöfnum. Hann er því ekki með andhverfuformúlu fyrir almennt fall.

RS: Hvert var stærðfræðilega vandamálið sem Radon var að fást við?

SH: Það var að ákveða fall á sléttunni út frá heildum þess yfir allar línur. Það er runnið frá kollega hans sem hét Funk. Funk vildi sanna að fall á kúlufleti megi ákvarða með heildum fallsins yfir stórhringi. Hann sýndi að það var hægt ef fallið er jafnstætt. Hann hafði þó ekki almenna andhverfuformúlu.

RS: Nú ertu búinn að segja okkur frá bókunum þínum. Hvenær er það sem þú ákveður að setjast að í Boston og ákveður að þú viljir starfa þar?

SH: Þegar ég var í Princeton 1954, þá fékk ég bréf frá Þórarni Björnssyni, þar sem hann bauð mér að koma og kenna stærðfræði á Akureyri. Þá var ég búinn að fá tilboð á MIT og ég tók því til að byrja með. Svo talaði ég svolítið við Leif meðan ég var á MIT um starfsmöguleika hérna heima. Þeir voru nú ekki miklir. Ég held nú samt að það sem gerði aðalútslagið var að ég var hræddur um að mig vantaði öll gögn til rannsókna, af því að ég vissi ósköp vel að á þeim árum var stærðfræðibókasafnið varla til. Þetta var í kringum 1956 löngu áður en Raunvísindastofnun kom til. Ég vissi ekki betur en að það væri ekkert til af tímaritum og lítið af bókum. Ég var nú að ræða þetta bæði við Trausta og Leif, hvað væri hægt að gera í því. Það kom fram uppástunga að sjái maður eitthvað áhugavert í Mathematical Reviews og þá væri hægt að skrifa eftir sérprentunum sem maður hefði áhuga á. Þetta gerir fólk náttúrlega, en það tekur sinn tíma. Þess vegna hikaði ég við þetta. Það var nú heldur ekki um svo margt að ræða, ekki einu sinni menntaskólakennslu í Reykjavík. Þannig gekk þetta sinn gang, maður frestaði ákvörðuninni.

RS: Blundaði þetta í þér?

SH: O, já. Ég kom hérna alltaf á sumrin og við Leifur töluðum mikið saman hérna eitt sumar man ég, það hefur verið í kringum 1960. Þá var ég nýbúinn að skrifa þessa grein í Acta 59, þar sem ég sannaði alhæfinguna á setningu Leifs og svo líka talsvert um Huygens-princip. Þetta voru áhugamál Leifs þótt mínar aðferðir væru allt öðruvísi en hans. En hann var mjög hlynntur þessum grúputeóretísku aðferðum þótt hann hefði ekki notað þær sjálfur.

RS: Svo þegar hjólin fara að snúast og þér gengur vel í Ameríku, þá hlýtur þetta bara að hafa horfið út úr myndinni.

SH: Bundgaard hitti ég í Princeton 1957 og hann hvatti mig til þess að sækja um stöðu í Árósum.

RS: Var hann þá byrjaður að byggja upp skólann í Árósum?

SH: Já, það held ég. Bundgaard hafði brennandi áhuga fyrir stærðfræðistofnun í Árósum. Hann hafði undirbúið og þrauthugsað málið svo vel að allir sannfærðust. Meðal annars held ég að hann hafi fengið talsvert fé í þetta frá Ford Foundation. Hann stjórnaði uppbyggingunni í Árósum snilldarvel. Ég held að þennan mikla renisans í stærðfræði í Danmörku eftir 1964 megi rekja til framtaks Bundgaards að miklu leyti, vegna þess að í Kaupmannahöfn var minni áhersla lögð á sambönd við útlönd. Bohr og Jessen höfðu að mínu áliti minni áhuga á því að Danmörk mundi vera þátttakandi í stærðfræði af alþjóðakarakter. Danir höfðu sínar sérgreinar, sem þeir gerðu betur en nokkrir aðrir, til dæmis næstum lotubundin föll, en þetta var á þeim tíma þegar sambönd við umheiminn voru miklu minni en það sem gerðist eftir stríðið. Eftir stríðið fóru sambönd milli háskóla út um allan heim hraðvaxandi og Bundgaard sá að það þýddi ekkert fyrir Danmörku að einangra sig stærðfræðilega. Þannig byggði hann upp Árósa á allt annarri fílósófíu heldur en hafði verið í Kaupmannahöfn. Þegar stærðfræðin byrjaði í Árósum, þá fór Kaupmannahöfn að taka við sér. Þá kom Ørsted-institut kringum 1964. Þá byrjar þetta með miklum krafti í Danmörku. Mér finnst í dag að Danir séu ákaflega fjölhæfir í stærðfræði og eigi framúrskarandi stærðfræðinga á mörgum sviðum.

RS: Á þeim árum sem þú varst nemandi, var fyrst og fremst eitt svið sem var eðlilegast að velja í Danmörku?

SH: Já, næstum lotubundi föll voru enn nokkuð í tísku. Að vísu fór nú Fuglede út í geometrísk próblem í sambandi við diffurjöfnur. Hann er afbragðsmaður og fjölhæfur mjög.

RS: Tekur hann svo við sem forstöðumaður Ørsted-stofnunarinnar í Kaupmannahöfn?

SH: Nei, fyrst var það Sparre Andersen í nokkur ár og svo Bent Fuglede.

RS: .. og Bundgaard þá í Árósum?

SH: Já, Bundgaard í Árósum. Bundgaard komst upp með það lengi vel að lausráða menn, þangað til að hæft fólk væri komið sem hann vildi fá að fastráða. Hann komst upp með það svona með einhverjum herkjum, en hann hafði alltaf mikið af útlendum gestum og institutið er heimsfrægt fyrir hvað það er skynsamlega uppbyggt. Jessen var nú forstöðumaður í Kaupmannahöfn lengi vel, ég man nú ekki hvenær hann hætti. Jessen var afburðakennari. Honum til heiðurs setti Dansk Matematisk Forening á stofn *Börge Jessen Diplom* sem er árleg viðurkenning fyrir stærðfræðierindi sem hefir verið „forståeligt, indholdsrigt og underholdende“. Smám saman jukust stærðfræðiiðkanir mikið í Kaupmannahöfn líka. Það var greinilegt að það gerði mikið útslag að hafa tvo staði.

RS: Við erum ennþá að tala um fyrstu árin í Boston.

SH: Ég var þarna 1954–6 og svo kom ég aftur til Boston eftir að ég hafði verið eitt ár við Columbia, 1959-60. Fyrsta árið þegar ég kom aftur til Boston lauk ég við þessa bók sem kom út 1962. Svo fór ég út í Radon-vörpunina og ég alhæfði hana yfir í samhverf rúm og það reyndist tengjast svolítið teóríu Harish-Chandra. Svo datt mér í hug út frá því Fourier-vörpun á samhverfum rúmum, sem mér finnst mjög einkennilegt að ekki skuli hafa verið þekkt áður, en hún virðist eftirá vera mjög eðlileg. Þá Fourier-vörpun notaði ég svo á diffurjöfnur á samhverfum rúmum. Það skemmtilega við það er, að sú Fourier-vörpun tengist mjög óvænt dálítið klassikum efnum. Til dæmis, ef maður skrifar Poisson-kjarnann á óevklíðskan hátt, sem sagt notar ekki evklíðskt norm í kjarnanum, þá kemur þarna veldisvísisfallið í staðinn og Poisson-tegurformúlan í potentialteoríu verðu hluti af óevklíðskri Fourier-greiningu. Þetta er í fyrsta kaflanum í 84-bókinni minni og er einnig lýst lauslega í grein minni sem er að koma út í Verpli. Þetta alhæfist yfir í samhverf rúm. Með þessari Fourier-vörpun sannaði ég að allir „invariant“ hlutafleiðuvirkjar á samhverfum rúmum eru átækir á rúminu $\mathcal{E}$ í Schwartz-skilningi. Það var Paley-Wiener-setningin sem ég hafði sannað fyrir þessa Fourier-vörpun, sem leiðir það af sér.

Þetta samband mættisfræði (potentialteoríu) og þessarar nýju Fourier-greiningar þróaðist miklu lengra. Fyrir hyperbólsk rúm (og almennara fyrir tvíhomogen rúm) tókst mér að sanna að eiginföll Laplace-virkjans eru nákvæmlega Poisson-tegur af hyperföllum (fáguðum fellum). Ég setti svo fram nákvæma tilgátu um alhæfingu á þessari setningu fyrir samhverf rúm. Á ráðstefnu í Washington 1971 skýrði ég Okamoto frá Hiroshima frá þessari tilgátu, og sýndi honum ýmsar fleiri niðurstöður málinu til stuðnings. Hann varð sannfærður; þegar hann kom aftur til Hiroshima gerði hann tilgátuna að rannsóknarefni fyrir sex Japana, þrjá frá Hiroshima og þrjá frá Tokyo. Af þeim voru þrír sérfræðingar í Lie-grúpum og þrír sérfræðingar í hyperfallafræðum.

Í þrjú ár hittust þessir sex á hálfsmánaðar fresti í borginni Kyoto, mitt á milli Hiroshima og Tokyo. Tilgátan reyndist alveg rétt og var sönnuð að fullu 1976, fimm árum síðar. Sönnunin birtist í grein í Annals of Mathematics 1978. Höfundar voru sex talsins; slíkt er ef til vill algengt í efnafræði, en í stærðfræði held ég að það hafi aldrei gerst, hvorki fyrr né síðar. Sönnunin byggist á spánýjum teoríum fyrir hyperföll sem voru þróaðar með tilgátuna í huga.

RS: Nýlega gafstu Háskólabókasafni safn stærðfræðibóka. Hvernig kom það til?

SH: Já, mér hefur dottið lengi í hug að reyna að hressa svolítið upp á bókasafnið. Ég skrifaði Jóni Ragnari Stefánssyni rétt eftir jólin í fyrra [1998]. Mig langaði til þess að gefa bækur, sem menn verulega vildu fá. Þess vegna bað ég hann um að ná í óskalista frá fólki. Ég bað hann um að segja engum frá því að ég væri á bak við það til að byrja með. Jón gerði þetta mjög samviskusamlega og kom með marga lista og ég pantaði eftir þessum listum. Ég kom með mest af þessu sjálfur af því að ég hef verið hérna fjórum sinnum síðasta ár.

Ég hef tekið eftir því að í Bandaríkjunum lifa bókasöfnin á fjárgjöfum og bókagjöfum, hvaðanæva að, fyrst og fremst frá fyrri nemendum. Skattalögin eru þannig að þetta er mjög hagkvæmt fyrir gefandann. En ef útlendingur gefur í eitthvert safn erlendis, þá myndu ekki vera nein skattfríðindi af því.

Fyrir 10 árum eða svo, þegar stóð til að opna Þjóðarbókhlöðuna, þá samdi ég áskorunarbréf til allra Íslendinga erlendis að gefa í bókasjóð Þjóðarbókhlöðunnar. Ég hafði samband við öll íslendingafélög í heiminum og sendi þeim bunka af þessum áskorunarbréfum og bað formenn félaganna að senda þetta til félagsmanna. Mönnum var bent á að senda pening á sérstakt bankanúmer í Landsbankanum. Þetta var sem sagt áður en byggingin var búin og það var lögð áhersla á að þetta var bara í bókasjóð, ekki í byggingarsjóðinn. Það var bent á það hvað dýrt er að halda uppi góðu bókasafni í öllum greinum. Meiningin var að fólk gæfi eitthvað í þetta. Það gekk svona og svona, en það fékkst eitthvað upp úr þessu. En svo fannst mér seinna að ég þyrfti að gera eitthvað fyrir stærðfræðideildina sérstaklega og þá var annað hvort að gefa bara peninga í safnið með ákveðið fag, stærðfræðina hér, sem njótanda sjóðsins, eða, sem var nú einfaldara, að koma með bækurnar sjálfur. Ég vildi þá vera viss um að þetta væru bækur sem menn vildu fá. Sumar bækurnar hafði ég séð og ég fór einnig dálítið eftir mati hvað mér fannst heppilegt.

RS: Nú hafa þessar bækur verið afhentar og þetta er mjög rausnarleg gjöf. Það er meira í vændum, því þú skildir eftir aura í sjóði. Við stærðfræðingarnir erum þér ákaflega þakklátir. Gefðu okkur nú gott ráð hvernig við eigum að halda á okkar peningum til bókakaupa?

SH: Það er einfaldast að einhver fulltrúi deildarinnar sé í bókasafnsnefndinni, sem kemur sjónarmiðum deildarinnar á framfæri. Þá ætti þetta að ganga á lýðræðislegan hátt. Mér skilst á fólki að það hafi gengið ákaflega dræmt með að kaupa stærðfræðibækur.

RS: Það sem gerðist var einfaldlega það, að raunvísindadeild ákvað að hætta að kaupa bækur og leggja áherslu á að halda í áskriftir að tímaritum. Það ástand varði í nokkur ár og engar bækur voru keyptar. Þess vegna kemur þessi bókagjöf eins og himnasending. Það þarf að bæta verulega í og hún er áminning til okkar stærðfræðinga að við verðum að hafa allar klær úti.

SH: Nú er ýmislegt að gerast í tímaritaútgáfu í stærðfræði. Það er meira og meira af greinum gefið út á tölvum og menn prenta greinarnar bara á sinn eigin prentara. Ég verð nú að segja eins og er að ég er dálítið hikandi við þessa þróun. Mér finnst að það sé svo margt sem fer í súginn sem menn taka ekki eftir. Það eru komin elektronisk tímarit sem eiga að hafa svipaðan standard eins og tímarit voru áður, en mér finnst lágmark að þessi tímarit komi út líka á pappír með abstrakta einu sinn á ári sem fólk geti flett upp á venjulegan hátt. Ég get ekki séð að þetta sé gert ennþá. MathSciNet hefir því mjög mikla þýðingu.

RS: Þú treystir sem sagt ekki því að þetta muni verða til um alla framtíð.

SH: Mér finnst þessi tölvutímaritaframleiðsla vera eins konar „death of scholarship". Mér finnst að það ætti að vera tiltölulega einfalt að framleiða einu sinni á ári abstrakta að öllum greinum sem komið hafa í hverju tímariti. Þegar það er fengið, þá geta menn farið í gegnum það tiltölulega fljótt og flett upp þeirri grein sem þeir hafa áhuga á.

RS: Nú eru einnig til forprentabankar, þar sem menn senda inn verk sín og höfundar bera einir ábyrgð á innihaldi greina sinna. Heldur þú að þetta hafi einhver áhrif á ritrýnikerfið riðlist í framtíðinni?

SH: Mér finnst ákaflega óþægilegt að sjá vitnað í elektrónískt forprent. Á stundum erfitt með að finna það enda er ég mikill tölvuklaufi. Einnig af því að þessi forprent eru ekki endilega ritrýnd. Þetta var nú gert áður fyrr líka og þá kallað „preprint", kannske með dagsetningu, en ég er sem sagt ekki búinn að venjast þessu.

RS: Fjölgar þessum tilvitnunum?

SH: Jú þetta fer vaxandi.

RS: Tekur ekki lengri tíma að fá greinarnar birtar?

SH: Nú heldurðu það, já.

RM: Það hefur vaxið frá tveimur árum upp í þrjú.

SH: Háskólar eru margir að skera niður kaup á tímaritum. Við hættum við Zentralblatt á MIT fyrir mörgum árum síðan. Mér finnst nú, að þegar stærðfræðigreinar eru framleiddar af höfundi í prenthæfu formi, þá ættu tímaritin a verða ódýrari, en það hefur nú ekki orðið nógu vel raunin á. Lækkunin er 25% við Acta Mathematica er mér sagt. Það sem gerist þar er að það þarf að ráða sérstakan mann til að samræma formatið á greinunum, af því þeir vilja ekki að það sé mismunandi eftir því hver sendir inn, og það kostar sinn pening líka. En samt er þetta sparnaður, en sá sparnaður er þó ekki nema 25%.

RM: Það er eitt sem mig langar til að spyrja þig um að lokum, þetta verður kannske „off the record", ég veit það ekki. Mig langar til að spyrja þig um góð ráð um uppbyggingu stærðfræði við Háskóla Íslands. Hvernig sérð þú framtíð okkar við Háskóla Íslands?

SH: Eins og er hafið þið Bachelor-próf, sem hefur gott kvalitet. Ég hef tekið eftir því í umsóknum sem ég hef séð. Þær eru alveg fullboðlegar við það sem gerist við aðra háskóla. Það sem stundum er plús við umsókn frá manni í „graduate school" er ef hann hefur skrifað einhverja ritgerð, sem þarf ekki að vera original, en sýnir samt vissa hæfileika og kunnáttu.

RS: Nú ertu að tala um meistaragráðu, er það ekki?

SH: Nei, það þarf ekki að vera það. Til dæmis við Harvard er svona „undergraduate thesis". Við höfum það nú að vísu ekki á MIT.

RM: Telur þú að við þurfum að hafa framhaldsnám hér líka?

SH: Þið eruð að hugsa um „graduate"-nám líka?

RS: Það er náttúrlega formlega til við deildina og það gengur mjög vel í öðrum greinum, í efnafræði, í eðlisfræði,...

SH: Allt upp í doktorspróf?

RS: Nei, aðeins upp í meistarapróf. Einstaka doktorsnemi er raunar í raunvísindadeild. Segjum nú að stúdent eigi sæmilega góða mastersritgerð og bankar á dyrnar í skóla erlendis og vill komast í doktorsnám. Er ekki gefið að honum yrði vel tekið, ef það er sýnt að þetta er góð ritgerð sem hann hefur skrifað?

SH: Hann myndi standa betur að vígi, svo framarlega sem hann er ekki allt of gamall og hefur ekki tekið of langan tíma til þess. Það er tekið svolítið tillit til aldurs líka. Til MIT sótti fjöldinn allur af Rússum sem vildu komast í amerískan

„graduate"-skóla til þess að fá ameríska doktorsgráðu, en þeir höfðu doktorsgráðuna þegar frá Rússlandi, þannig að þeir voru ekki teknir með í reikninginn. Hins vegar eru margir sem hafa mastersgráðu. Ef þeir eru tiltölulega ungir þá myndi það hjálpa.

RS: Stúdentarnir okkar útskrifast úr menntaskólunum 20 ára, 23 ára með BS-próf og þá væntanlega 25 ára með meistaragráðu eftir tveggja ára nám þar sem helmingurinn er námskeið og helmingurinn er ritgerð. Er nokkuð að 25 ára gömlum manni?

SH: Nei, síður en svo. Sjálfur fór ég fór til graduate-náms í Ameríku með mastersgráðu frá Kaupmannhöfn. Var þá næstum 25 ára. Af samstúdentum í Princeton var ég einn af fáum, sem var þegar með mastersgráðu, en ég lauk líka miklu fyrr en aðrir. Flestir voru þarna fjögur eða fimm ár, en ég var bara tvö. Ég sé ekkert athugavert við meistaraprófsprógram hérna.

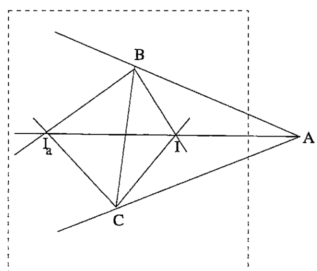
Þrautahorn

Robert Magnus

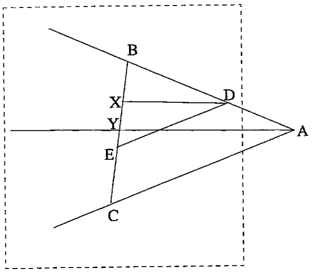
Ég þakka Helga Jónssyni bréf sem hafði að geyma lausnir á öllum þrautunum úr vorbréfinu. Um leið hvet ég aftur lesendur til að senda tillögur um þrautir.

Þraut 7. Á pappírsblaði eru tvær ósamsíða línur en þær skerast ekki á blaðinu. Teikna skal helmingalínu hornsins milli línanna tveggja með hringfara og reglustiku en án þess að teikna neitt utan blaðsins.

Lausn. Upphaflega hafði ég eftirfarandi „lausn" í huga. Látum A vera skurðpunktinn (utan blaðs) og veljum B á fyrri línunni l og C á seinni línunni m. Þá teiknuðum við helmingalínur hornanna ABC og ACB bæði innanverða og utanverða. Innanverðu helmingalínurnar skerast í I, innmiðju þríhyrningsins ABC, og utanverðu helmingarlínurnar skerast í I_a, miðju utanverða snertihringsins. Það er þekkt að A, I og I_a liggja á beinni línu. Gallinn er sá að við megum ekki ætla að I eða I_a liggi innan blaðsins.



Lausn Helga er laus við þetta vandamál. Hér er lausn, svipuð lausn Helga, en nokkuð einfaldari. Veljum B á l og C á m. Frá punkti D á l (öðrum en B) drögum við línu samsíðu m sem sker BC innanverða í punkti E. Þríhyrningurinn BED er einslaga BCA. Teiknum helmingalínu hornsins BDE og látum hana skera BE í X. Við getum nú fundið punktinn Y þar sem helmingalína hornsins A sker BC því að $BY/YC = BX/XE$. Ennfremur er helmingalína A samsíða DX.



Helgi hefur aðra aðferð til að finna Y. Hann velur P á AB og Q á AC (bæði innan blaðs að sjálfsögðu) þannig að $BP = CQ$. Þá bendir hann á að $BY/YC = QQ_1/PP_1$ þar sem P_1 og Q_1 eru fótpunktar lóðlína frá P og Q á BC. Ég læt lesendanum eftir að rökstyðja þetta.

Þraut 8. Það er vel þekkt að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er ósamleitin. Ef við sleppum öllum liðum $1/n$ þar sem tölustafurinn 0 kemur fyrir í tugaframsetningu tölunnar n, er röðin þá samleitin eða ósamleitin?

Lausn. Hún er samleitin. Metum summu allra brota $1/n$ þar sem n hefur $m+1$ tölustaf og enginn þeirra er 0. Fjöldi slíkra brota er 9^{m+1} og eru þau öll minni en 10^{-m}. Summa þeirra er því minni en $9^{m+1}10^{-m} = 9 \cdot (0,9)^{-m}$. Röðin í heild er því minni en

$$\sum_{m=0}^{\infty} 9 \cdot (0,9)^{-m} = 90.$$

Helgi Jónsson bendir á að niðurstaðan gildir fyrir hvaða sætiskerfi sem er og sannar hann yfirmatið $g(g-1)$ þar sem g er grunntala kerfisins.

Þraut 9. Ef við köstum tveimur venjulegum teningum þá eru líkindi þess að fá summurnar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 jöfn $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{36}$, í þessari röð. Líkindi að fá aðrar útkomur eru að sjálfsögðu 0. Er hægt að merkja hliðar tveggja teninga (sem hafa hvor sex hliðar) jákvæðum heilum tölum á annan hátt, þannig að líkindi þess að fá ofanskráðu útkomurnar eru þau sömu og fyrir venjulega teninga?

Lausn. Hverjum mögulegum sexhliðateningi úthlutum við margliðu $f(x)$ þannig að stuðullinn við x^k er fjöldi hliða sem eru merktar k. Þar sem fjöldi hliða er 6 fæst að $f(1) = 6$. Þar sem engin hlið er merkt 0 fæst að fastastuðullinn er 0, þ.e. $f(x)$ er deilanleg með x. Til dæmis er venjulegum teningi úthlutað $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Ef teningi A er úthlutað margliðunni $f(x)$ og teningi B margliðunni $g(x)$ þá er stuðullinn við x^k í margfeldinu $f(x)g(x)$ jafn fjölda leiða til að fá summuna k þegar teningunum tveimur er kastað. Við eigum því að finna margliður $f(x)$ og $g(x)$ þannig að þær svari til sexhliðateningum og

$$f(x)g(x) = (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 = x^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2.$$

Þar sem $f(1) = g(1) = 1$ og fasti stuðullinn í hvorri margliðu er 0 (vegna þess að engin hlið er merkt 0) eru einungis um tvær þáttanir að ræða. Þær eru

$$f(x) = x(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = g(x),$$

það eru venjulegir teningar, og

$$f(x) = x(x+1)(x^2+x+1) = x^4+2x^3+2x^2+x$$

og

$$g(x) = x(x+1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1) = x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x.$$

Til er því einungis ein óhefðbundin leið til að merkja teningana. A er merktur: 1, 2, 2, 3, 3, 4. B er merktur: 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Hér kemur nýr skammtur, í þetta skipti fjórar þrautir.

Þraut 10. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning. Teikna skal ferning með reglustiku og hringfara, þannig tveir hornpunktar ferningsins liggi á BC, einn á AB og einn á AC.

Hafið þið nokkurn tíma krotað á blaði til að berjast gegn svæfandi áhrifum stærðfræðifyrirlesturs? Ef svo er hafið þið kannski tekið eftir niðurstöðu sem er efni næstu þrautar.

Þraut 11. Landakort er þannig að hægt er að draga öll landamærin með blýanti án þess að lyfta blýantnum. Sýnið að hægt er að lita kortið með tveimur litum.

Þraut 12. Slétta S skiptir réttri hringlaga keilu K í tvo hluta K_1 og K_2. S snertir botnhringinn í punkti A og helmingar þá framleiðandi línu sem liggur gegn um punkt botnhringsins á móti A. Ákvarðið hlutfall rúmmála K_1 og K_2.

Hér er enn ein „utanblaðs“ þraut.

Þraut 13. Bogi er gefinn á blaði og vitað er að hann er annaðhvort hluti af sporbaugi eða hluti af breiðboga. Getið þið ákvarðað hvort hann er, með því að nota aðeins hringfara og reglustiku?

Alþjóðleg Ólympíukeppni í stærðfræði árið 2000

Fjóla Rún Björnsdóttir og Friðrik Diego

Árviss Ólympíukeppni í stærðfræði var á þessu ári haldin í borginni Taejon í Suður-Kóreu. Keppendur voru 461 talsins frá 82 þjóðum, þar af voru sex Íslendingar. Umrædd Ólympíukeppni (eða Ólympíuleikar) var hin 41. í röðinni en Íslendingar kepptu nú í 16. sinn.

Íslensku keppendurnir, sem komu úr Menntaskólanum í Reykjavík og Menntaskólanum við Hamrahlíð, voru þessir: Bjarni Kristinn Torfason, Pawel Bartoszek, Ingvar Sigurjónsson, Guðni Ólafsson, Indriði Einarsson og Eyvindur Ari Pálsson. Með í för, til fararstjórnar og dómnefndarsetu, voru Fjóla Rún Björnsdóttir og Friðrik Diego.

Óhætt er að segja að mikið hafi verið lagt í keppnina. Árið 2000 kallast ár stærðfræðinnar og þó árið fari stundum villt alda og árþúsunda, þá kallar ártalið fram margskonar vangaveltur um tímamót og eykur hátíðleikann á samkomu eins og Ólympíukeppni í stærðfræði. Greinilega hafði verið lögð alúð við undirbúning keppninnar og var skipulag á keppnisstað til fyrirmyndar. Fjölmörg skemmti- og menningaratriði fylgdu keppninni: hljómlist, söngur, dans og kvikmyndasýningar, hvert atriðið öðru stórkostlegra.

Kórea er land morgunkyrrðarinnar. Víða er fallegt um að litast á Kóreuskaga og þar býr þjóð sem á sér stórbrotna sögu og menningu, eigin tungu og sérstakt letur. Í ferðahandbókum má lesa um gestrisni og vinalegt viðmót Kóreubúa og það kom fljótt í ljós að þeim er þar rétt lýst. Sumarið 2000 var um fátt meira talað í Kóreu en þíðu í samskiptum ríkjanna tveggja, Norður-Kóreu og Suður-Kóreu. Áberandi var hve heilshugar Suður-Kóreumenn vonuðust eftir nánari tengslum við hinn hluta þjóðarinnar.

Áður en haldið var til Kóreu fengu íslensku keppendurnir bæði tilsögn og þjálfun í stærðfræðilegum efnum. Margir fórnfúsir kennarar komu þar við sögu, en mest ber að meta framlag nemendanna sjálfra sem unnu af óaðfinnanlegri ósérhlífni vikum saman.

Á mælikvarða venjulegs fólks, jafnvel áhugafólks um stærðfræði, eru dæmi í Ólympíukeppni afar þung. Að vanda voru keppnisdæmin sex talsins, þrjú hvorn keppnisdag 19. og 20. júlí, gefinn tími hvorn dag var fjórar og hálf klukkustund. Það er vinsælt að láta ártal keppninnar koma við sögu í einhverju dæmanna og talan 2000 kemur vissulega fyrir í dæmi 5, en er þar heldur afvegaleiðandi og gerir dæmið erfiðara. Þrjú dæmanna (nr. 3, 5 og 6) má telja verulega erfið, meðalstigafjöldi allra keppanda fyrir þau var nálægt 1 af 7 stigum mögulegum.

Dæmi 1, 2 og 4 geta kallast viðráðanlegri, lætur nærri að meðalstigafjöldi þar hafi verið á milli 3 og 4. Okkar maður, Pawel, fékk fullt hús stiga fyrir eitt þeirra, dæmið nr. 4 um töframanninn. Fyrir þetta fékk hann viðurkenningu. Jafnframt var hann sá íslensku keppendanna sem bestum árangri náði, fékk alls tíu stig, sem var hreint ekki slakur árangur í erfiðri keppni. Vonbrigði reyndust þó þar í fólgin, því ellefu stig þurfti til bronsverðlauna. Þetta mun ekki fyrsta skipti sem okkar hæsti maður er einu stigi frá verðlaunapeningi. Hinum keppendum okkar gekk einnig sumt í hag og sumt í óhag, allir sýndu þeir ótvírætt mikla getu, en gerðu jafnframt talsvert af mistökum.

Fjórir keppendur leystu öll verkefnin, fengu 42 stig, tveir þeirra Rússar, einn Kínverji og einn frá Hvíta-Rússlandi.

Flest stig fengu Kínverjar, samtals 218 stig. Næstir komu Rússar með 215 stig, þá Bandaríkjamenn með 184 stig og svo Kóreumenn sem fengu 172 stig. Alls fengu tíu þjóðir meira en 150 stig. Íslenska liðið fékk 37 stig og í röð þjóða eftir heildarstigatölu voru Íslendingar rétt neðan 60. sætis af 82. Við því var vissulega aldrei búist að við yrðum meðal efstu þjóða og þessi niðurstaða telst hvorki góð né slæm (en væri miðað við höfðatölu myndi varla nokkur kvarði duga til að mæla ofurframmistöðu okkar manna). Það kann hinsvegar að vera einhverjum umhugsunarefni að Íslendingar, sem aðrar Norðurlandaþjóðir, skuli jafnan standa sig illa þegar rúmfræðidæmi eru annars vegar.

Þegar líða tók á stigatalningu kom í ljós, að árangur Dana og Íslendinga yrði áþekkur. Á endanum fór svo, að við höfðum einu stigi meira en þeir. Það þykja alltaf tíðindi þegar við vinnum Dani.

Hér á eftir fara dæmin úr keppninni. Lausnir fylgja ekki með að þessu sinni, hugsanlega birtist hluti þeirra síðar, en einnig má nálgast lausnir hjá áðurnefndum fararstjóra eða dómnefndarfulltrúa.

Fyrri dagur, Taejon, 19. júlí 2000

Dæmi 1. Tveir hringir Γ_1 og Γ_2 skerast í punktum M og N. Látum l vera þann sameiginlega snertil við Γ_1 og Γ_2 sem er nær punktinum M heldur en punktinum N. Látum l snerta Γ_1 í punktinum A og Γ_2 í punktinum B. Látum línuna gegnum M samsíða l skera hringinn Γ_1 aftur í punktinum C og hringinn Γ_2 aftur í punktinum D. Línurnar CA og DB skerast í E, línurnar AN og CD skerast í P, línurnar BN og CD skerast í Q. Sýnið að $EP = EQ$.

Dæmi 2. Látum a, b, c vera jákvæðar rauntölur, þannig að $abc = 1$. Sannið að

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Dæmi 3. Látum $n \geq 2$ vera jákvæða heiltölu. Í upphafi eru n flær á láréttri línu, ekki allar í sama punkti. Fyrir jákvæða rauntölu λ skilgreinum við *færslu* á eftirfarandi hátt: Veljum tvær flær, staðsettar í punktum A og B, með A vinstra megin við B, látum flóna sem er í A stökkva í punkt C, á línunni, hægra megin við B þannig að $BC/AB = \lambda$. Ákvarðið öll gildi á λ, þannig að fyrir sérhvern punkt M á línunni og sérhverja upphafsstöðu hinna n flóa, sé til endanleg runa af færslum, þannig að allar flærnar lendi hægra megin við M.

Seinni dagur, Taejon, 20. júlí 2000

Dæmi 4. Töframaður nokkur á 100 spjöld, sem eru númeruð frá 1 til 100. Hann setur þau í þrjá kassa, einn rauðan, einn hvítan og einn bláan, þannig að í hvern kassa fari a.m.k. eitt spjald. Einhver úr hópi áhorfenda velur tvo kassanna, tekur eitt spjald úr hvorum og tilkynnir summu talnanna á spjöldunum sem hann valdi. Að fenginni þessari summu tilgreinir töframaðurinn úr hvaða kassa ekki var valið spjald. Á hve marga vegu er unnt að raða spjöldunum í kassana þannig að bragð töframannsins megi ávallt heppnast? (Gerður er greinarmunur tveggja möguleika ef a.m.k. eitt spjaldanna fer ekki í sama kassann.)

Dæmi 5. Ákvarðið hvort til sé jákvæð heiltala n þannig að n sé deilanleg með nákvæmlega 2000 mismunandi frumtölum og $2^n + 1$ sé deilanleg með n.

Dæmi 6. Látum AH_1, BH_2, CH_3 vera hæðir í hvasshyrndum þríhyrningi ABC. Innritaður hringur þríhyrningsins ABC snertir hliðarnar BC, CA, AB í punktunum T_1, T_2, T_3. Látum l_1 vera spegilmynd línunnar H_2H_3 í línunni T_2T_3, látum l_2 vera spegilmynd línunnar H_3H_1 í línununni T_3T_1 og látum l_3 vera spegilmynd línunnar H_1H_2 í línunni T_1T_2. Sannið að l_1, l_2 og l_3 ákvarði þríhyrning sem hefur hornpunkta sína á innritaða hring þríhyrningsins ABC.

Kosning í Bændaríkjunum

Robert Magnus

Þegar þetta er skrifað stendur yfir talning atkvæða í Floridaríki og er enn ekki vitað hvor þeirra, Gore eða Bush, verði næsti forseti Bandaríkjanna. Mér datt í hug grein sem birtist í Scientific American fyrir fimm árum í röðinni Mathematical Recreations þar sem reglulegur höfundur dálksins Ian Stewart fjallar á afar skemmtilegan hátt um stærðfræði kosningakerfa af því tagi sem notað er til að velja forseta vestanhafs. Eftirfarandi frásögn er lauslega byggð á greininni, að viðbættu algebrulegu innleggi frá mér. Ég mun ekki reyna að herma eftir stíl greinarinnar sem er í formi leikrits þar sem forseti lands nokkurs ræðir við aðstoðarmenn og kosningarstjóra og beitir höfundurinn óspart orðaleikjum í vali á nöfnum persónanna.

Landið heitir Bændaríkin og er skipt í sex sýslur: Hrossasýslu, Nautasýslu, Kindasýslu, Svínasýslu, Kjúklingasýslu og Gúrkusýslu. Röðin er eftir minnkandi stærð. Sýslurnar hafa hver ákveðinn atkvæðafjölda í forsetakosningum, og er sá fjöldi um það bil í beinu hlutfalli við stærð sýslunnar. Öll atkvæði sýslunnar falla á sama frambjóðanda. Fjöldi atkvæða hverrar sýslu er sýndur í fyrsta dálki töflunnar.

Atkvæðafjöldi		Breyttur fjöldi A		Breyttur fjöldi B	
Hrossasýsla	10	Hrossasýsla	10	Hrossasýsla	12
Nautasýsla	9	Nautasýsla	9	Nautasýsla	9
Kindasýsla	7	Kindasýsla	7	Kindasýsla	7
Svínasýsla	3	Svínasýsla	3	Svínasýsla	3
Kjúklingasýsla	1	Kjúklingasýsla	2	Kjúklingasýsla	1
Gúrkusýsla	1	Gúrkusýsla	2	Gúrkusýsla	1

Taflan sýnir fjölda atkvæða fyrir hverja sýslu í Bændaríkjunum og tvær tillögur um breytingar

Fulltrúi frá Gúrkusýslu kvartar sáran og segir sýsluna valdalausa. Hann bendir fyrst á að 16 atkvæði nægi til að vinna kosningar og síðan beitir hann Skúffureglu Dirichlet með því að benda á að af sýslunum þremur, Hrossasýslu, Nautasýslu og Svínasýslu, hljóti tvær að kjósa eins, en samanlagður fjöldi atkvæða tveggja þeirra sé minnst 16. Niðurstaða kosninganna er því sú sama hvernig sem minnstu sýslurnar þrjár kjósa.

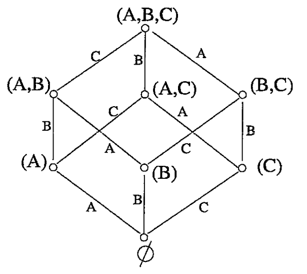
Til þess að bæta úr þessu er fyrst litið á þá tillögu að gefa Kjúklingasýslu og Gúrkusýslu hvorri um sig aukaatkvæði. Þetta er sýnt í öðrum dálk töflunnar. Heildarfjöldi atkvæði er nú 33 og 17 nægja til að vinna. Samanlagður fjöldi atkvæða Hrossasýslu, Svínasýslu, Kjúklingasýslu og Gúrkusýslu er 17. En ef önnur minnstu sýslanna tveggja breytir um atkæði hefur það áhrif á niðurstöðuna. Þessar sýslur hafa því fengið völd.

Síðan er bent á aðra leið. Stungið er upp á að gefa Hrossasýslu tvö aukaatkvæði. Það virðist mótsagnakennt við fyrstu sýn, en fleiri atkvæði fyrir stærstu sýsluna gerir það að verkum að nokkur völd eru flutt frá þeim stærstu til þeirra minnstu. Aftur nægja 17 atkvæði til sigurs. Tvær samsteypur eru mögulegar með Gúrkusýslu sem hafa samanlagðan atkvæðafjölda 17. Ef Gúrkusýsla yfirgefur aðra hvora samsteypuna breytir það niðurstöðu kosninganna. Gúrkusýsla hefur því fengið nokkur völd.

Ef völd eru ekki beinlínis mæld í atkvæðum hvernig getum við þá mælt þau? Valdavísitala Banzhafs gefur svarið. Árið 1965 setti John F. Banzhaf III, lögfræðingur og baráttumaður, fram tillögu um leið til að mæla völd aðila í kosningakerfi. Hugmyndin er sú að völd aðila eru jöfn fjölda samsteypa þar sem þátttaka hans ræður úrslitum um það hvort samsteypan hefur meirihluta eða minnihluta atkvæða. Sagt er að aðili sé í vendistöðu í slíkri samsteypu.

Í besta tilfelli ættu völd sýslanna í kosningakerfi að vera í beinu hlutfalli við íbúafjölda þeirra. Skoðum breytta kerfið B að ofan. Hrossasýsla, með 12 atkvæði, er í vendistöðu í öllum samsteypum sem hafa samtals frá 17 og upp í 28 atkvæði. Það er ekki ófýsilegt að handtelja alla möguleika. Þeir eru 18. Völd Hrossasýslu eru því 9 sinnum völd Gúrkusýslu (sem er í vendistöðu í 2 samsteypum) en atkvæðafjöldinn er 12 sinnum stærri.

Í greininni er lýst grafískri aðferð til að reikna valdavísitöluna. Látum V vera mengi aðilanna í kosningarkerfinu. Mögulegar samsteypur eru öll hlutmengin af V (þar á meðal tóma mengið) og mynda þær hnúta nets. Setjum legg milli tveggja samsteypa ef önnur þeirra er jöfn hinni að viðbætum einum aðila. Merkjum legginn þann aðila. Litum legginn (og nefnum hann vendilegg) ef samsteypan við annan endann heldur minnihluta en sú við hinn endann meirihluta (eða helming) atkvæða. Valdavísitala aðila er jöfn fjölda litaðra leggja sem eru merktir honum. Fjöldi hnúta í netinu eru 2^n þar sem n er fjöldi aðila. Stærð netsins vex því mjög hratt með n. Grindin er sýnd í tilfellinu $n = 3$ þar sem hún myndar tening. Útreikningarnir verða fljótlega of erfiðir og ekki fýsilegir að framkvæma með handtalningu nema n sé lítil tala. Fyrir raunhæf kosningarkerfi er því tölva notuð.



Kosningakerfi með þremur aðilum. Látum fjölda atkvæða A, B og C vera N_A, N_B og N_C, og röðum þeim $N_A \leq N_B \leq N_C$. Til eru nákvæmlega þrír möguleikar. Ef $N_A + N_B < N_C$ hafa A, B og C valdavísitölur 0, 0 og 4. Ef $N_A + N_B = N_C$ eru valdavísitölur 1, 1, og 3. Ef $N_A + N_B > N_C$ hafa allir sömu valdavísitölu 2.

Til er önnur aðferð, sem kemur ekki fram í greininni. Mér finnst hún viðráðanleg fyrir lítil kerfi eins og það í Bændaríkjunum og getur lesandinn auðveldlega notað hana til að reikna valdavísitölu sýslanna án þess að nota tölvu. Ég hef einnig prófað hana á „electoral college“ Bandaríkjanna en þá gengur ágætlega að nota Maple 6.

Fyrir hvern aðila v í menginu V er $n(v)$ látinn vera fjöldi atkvæða hans. Búum til margliðuna

$$P(x) = \prod_{v \in V} (1 + x^{n(v)}).$$

Látum m vera fjölda atkvæða sem þarf fyrir meirihluta (eða helming heildaratkvæðafjölda ef þessi tala er slétt). Valdavísitala aðilans v er jöfn summu stuðlanna við veldin x^k, fyrir $k = m - n(v), n + 1 - n(v), \ldots, m - 1$, í margliðunni

$$\frac{P(x)}{1 + x^{n(v)}}.$$

Til dæmis er valdavísitala Hrossasýslu í breytta kerfinu B jöfn summu stuðlanna við x^5 upp í x^{16} í margliðunni

$$(1 + x)^2 (1 + x^3)(1 + x^7)(1 + x^9).$$

Til að reikna valdavísitölu fyrir stórt kerfi er þægilegra að sækja einungis *einn* stuðul úr ákveðinni margliðu. Þetta er gert með því að búa til margliðuna

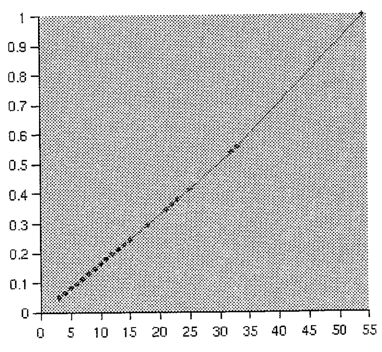
$$Q_v(x) = \frac{P(x)(1 - x^{n(v)})}{(1 + x^{n(v)})(1 - x)}.$$

Valdavísitala aðilans v er jöfn stuðlinum við x^{m-1} í $Q_v(x)$.

Fyrir „electoral college“ Bandaríkjanna er stig margliðunnar $P(x)$ jafnt 538 og $m = 269$. Samt var Maple 6 á hústölvu Raunvísindastofnunar aðeins sekúndubrot að reikna stuðulinn við x^{268} í $Q_v(x)$. Dæmi um valdavísitölur samkvæmt mínum útreikningum eru: Vermont (3 atkvæði) 25.731.095.182.547, Florida (25 atkvæði) 218.271.801.954.339, California (54 atkvæði) 552.180.666.785.903. Á skala þar sem California hefur valdavísitölu 1 gefur þetta 0,049, 0,416 og 1. Valdavísitalan virðist vaxa aðeins hraðar en línulega sem fall af atkvæðafjölda og reyndar er þetta staðfest með athugun á öllum ríkjum. Þó að California hafi 18 sinnum fleiri atkvæði en Vermont myndi ég ráðleggja forsetaframbjóðanda að verja 20,4 sinnum meiri tíma í að tala til fólks í fyrrnefnda ríkinu.

Í greininni er niðurstaða greind fyrir Tompkins County, New York, 1982. Þar voru 15 svæði sem voru aðilar að kosningakerfinu, það stærsta með 8317 íbúa og 404 atkvæði en það minnsta með 4552 íbúa og 210 atkvæði. En kvótinn, valdavísitalan á móti íbúafjöldanum,var næstum sá sami fyrir öll 15 svæðin.

Að lokum er því haldið fram í greininni að Bandaríkjaforseti hafi 40 sinnum meiri völd en öldungadeildarþingmaður og 175 sinnum meiri en fulltrúadeildarþingmaður, en bæði þingin saman hafa u.þ.b. 2,5 sinnum meiri völd en forsetinn.



Grafið sýnir valdavísitöluna (miðað við 1 fyrir Californiu) sem fall af fjölda atkvæða fyrir 51 ríki Bandaríkjanna. Það er greinilegt að vöxtur valdavísitölunnar er örlítið meiri en línulegur.

Lesning

Ian Stewart. Mathematical Recreations. Election Fever in Blockvotia, Scientific American, júlí 1995.