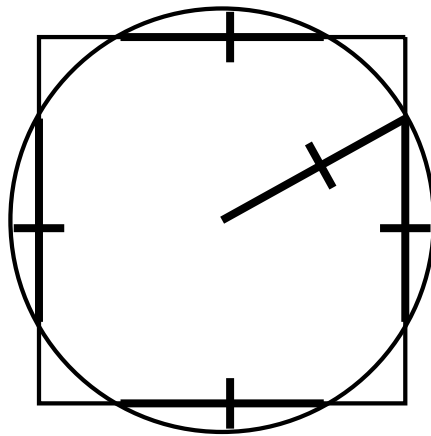


Íslenska stærðfræðafélagið  
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2011-2012

Svör og lausnir

Neðra stig



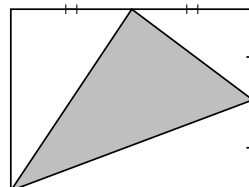
## Fyrsti hluti

1. Setjum  $n = x - y^{x-y}$ . Hvað er  $n$  ef  $x = 2$  og  $y = -2$ ?

-14                       0                       1                       18

**Skýring:**  $n = 2 - (-2)^{2-(-2)} = 2 - (-2)^4 = 2 - 16 = -14$

2. Hve stór hluti rétthyrningsins er skyggður?



$\frac{1}{4}$                         $\frac{1}{3}$                         $\frac{3}{8}$                         $\frac{2}{5}$

**Skýring:** Tveir hornpunktar skyggða þríhyrningsins eru miðpunktarnir hliða rétthyrningsins. Óskyggt svæði er því  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ . Skyggða svæðið er því  $\frac{3}{8}$  af flatarmáli ferningsins.

3. Á veitingastað eru nákvæmlega 19 borð. Borðin eru af tveimur gerðum, fjögurra manna og sex manna. Ef veitingastaðurinn tekur í heildina 90 manns, hvað eru mörg sex manna borð?

6                       7                       8                       9

**Skýring:** Ef fjöldi sex manna borða er  $x$  og fjöldi níu manna borða er  $y$  þá er  $x + y = 19$  og  $6x + 4y = 90$ . Séu jöfnurnar leystar saman fæst að  $x = 7$ .

4. Gefið er að  $2x + 3y = 6x - y$  og  $x + y \neq 0$ . Þá er  $\frac{7x - y}{x + y}$  jafnt og

1                       2                       3                       4

**Skýring:** Þar sem  $2x + 3y = 6x - y$  þá er  $4y = 4x$  og því  $y = x$ . Skilyrðið  $x + y \neq 0$  tryggir þá að  $x \neq 0$  og  $y \neq 0$ . Þá má reikna

$$\frac{7x - y}{x + y} = \frac{7x - x}{x + x} = \frac{6x}{2x} = 3.$$

5. Meðaltal 50 talna er 38. Tvær talnanna eru 45 og 55. Hvert verður meðaltalið ef þessum tveimur tölum er sleppt?

36                       36,5                       37                       37,5

**Skýring:** Ef meðaltal 50 talna er 38 þá er summa talnanna  $38 \cdot 50 = 1900$ . Að tölunum 45 og 55 slepptum verður summan 1800 og meðaltal þeirra 48 talna sem eftir eru verður  $1800/48 = 75/2 = 37,5$ .

6. Hve margar þrenndir rauntalna  $(a, b, c)$  uppfylla jöfnurnar  $ab = c$ ,  $ac = b$  og  $bc = a$ ?

2                       4                       5                       6

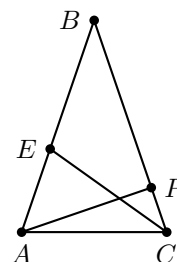
**Skýring:** Það er ljóst að þrenndirnar  $(0, 0, 0)$  og  $(1, 1, 1)$  uppfylla jöfnurnar. Ef einhver talnanna er 0 þá verða alla tölurnar að vera 0 svo ef þriðja þrenndin er til þá er enginn talnanna 0. Ef  $(a, b, c)$  er slík lausn þá verður  $b = c/a$  og því er  $ac = c/a$ . Þá er  $(a^2 - 1)c = 0$  og því  $a = \pm 1$ . Val  $a = 1$  leiðir til  $b = c$  og  $bc = b^2 = c^2 = 1$ . Þrenndin  $(1, -1, -1)$  er því líka lausn. Sökum samhverfu eru aðrar lausnir  $(-1, 1, -1)$  og  $(-1, -1, 1)$ . Alls 5 þrenndir.

7. Rauntölur  $x$  og  $y$  eru lausnir jöfnunnar  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-x} = 0$ . Hvert er gildi stærðarinnar  $x + 2y$ ?

1                       2                       3                       4

**Skýring:** Hvorug stærðanna  $\sqrt{x-1}$  og  $\sqrt{y-x}$  getur verið neikvæð og þar sem summan er 0, þá verða þær báðar að vera 0. Því er  $x = 1$  og  $y = x$ , og þar með  $y = 1$ . Þá er  $x + 2y = 3$ .

8. Í jafnarma þríhyrningi  $ABC$  er  $AB = BC$ .  $P$  er á hlið  $BC$  þannig að  $AP \perp BC$  og  $E$  er á hlið  $AB$  þannig að strikið  $CE$  helmingar hornið  $\angle ACB$ . Hversu margar gráður er hornið  $\angle AEC$  ef  $\angle ABC = 40^\circ$ ?



60                       75                       85                       90

**Skýring:** Þar sem  $AB = BC$  þá eru hornin  $\angle BAC$  og  $\angle BCA$  jafnstór. Til samans eru hornin  $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$  og því hvort um sig  $70^\circ$ . Þá reiknast hornið  $\angle ACE = 35^\circ$  og þar með fæst að  $\angle AEC = 180^\circ - (70^\circ + 35^\circ) = 75^\circ$ .

9. Ef  $m = a^a$  og  $a = n^{2n}$  þá er  $m$  jafnt og

$n^{2n}$ 
                 
   $n^{n^{2n}}$ 
                 
   $n^{2n^{2n}}$ 
                 
   $n^{2n^{2n+1}}$

**Skýring:**  $m = (n^{2n})^{n^{2n}} = n^{2n \cdot n^{2n}} = n^{2n^{2n+1}}$

10. Fjöldi heiltölutvennda  $(m, n)$  þannig að  $2^m - 2^n = 63$  er

0
                 
  1
                 
  2
                 
  meiri en 2

**Skýring:** Þar sem  $2^m - 2^n$  er jákvæð stærð þá er  $m > n$  og því  $m - n > 0$ . Þá má skrifa  $2^n(2^{m-n} - 1) = 63$  og af því sést að  $n$  getur ekki verið jákvæð heiltala því þá væri vinstri hliðin slétt tala. Og  $n$  getur ekki heldur verið neikvæð heiltala því þá væri oddatalan  $2^{m-n} - 1$  jöfn sléttu tölunni  $63 \cdot 2^{-n}$ . Talan  $n$  verður því að vera 0, svo að  $2^m = 64$  og þá er  $m = 6$ . Því er  $(m, n) = (6, 0)$  eina heiltölutvenndin þannig að  $2^m - 2^n = 63$ .

## Annar hluti

11. Tölustöfunum 1, 2, 3, 4 og 9 er raðað til að mynda fimm stafa tölu. Talan sem er mynduð er minnsta slétta fimm stafa talan sem hægt er að búa til úr þessum tölustöfum. Hvaða tölustafur er í tugasetinu (næst aftastur)?

1
                 
  2
                 
  3
                 
  4
                 
  9

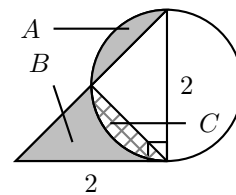
**Skýring:** Þar sem talan á að vera slétt tala verður hún að enda á 2 eða 4. Að öðru leiti má raða tölustöfunum hvernig sem er. Til að talan verði sem minnst þá borgar sig að byrja á minnsta tölustafnum, svo taka þann næstminnsta, o.s.frv. ef það er mögulegt. Svo best er að setja hærri slétta tölustafinn í aftasta sætið og raða restinni. Þá fæst að minnsta talan er 12394.

12. Miðpunktur hrings sem liggur í gegnum punktana  $A = (3, 2)$ ,  $B = (7, 5)$  og  $C = (3, 5)$  hefur hnitin

$(5, 3)$ 
                 
   $(4, \frac{7}{2})$ 
                 
   $(\frac{7}{2}, 5)$ 
                 
   $(5, \frac{7}{2})$ 
                 
   $(3, 5)$

**Skýring:** Punktarnir þrír mynda réttan þríhyrning með lóðrétta skammhlið  $AC$  og lárétta skammhlið  $CB$ . Miðja hringsins er þá miðpunktur langhliðarinnar  $AB$  og hefur hnitin  $(5, 7/2)$ .

13. Myndin sýnir hring með þvermál 2 og rétthyrndan þríhyrning. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



- $\pi - \frac{1}{2}$     
 1    
  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$     
  $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$     
 2

**Skýring:** Flatarmál skyggða svæðisins er jafnt samanlögðu flatarmáli svæðanna  $A$  og  $B$ . Þar sem svæði  $C$  er jafn stórt og svæði  $A$  þá er flatarmál svæðisins sem spurt er um jafnt flatarmáli þríhyrnings með grunnlínu 2 og hæð 1.

14. Hve mörg hlutmengi í menginu  $\{a, b, c, d, e, f\}$  innihalda bæði  $a$  og  $b$ ?

- 9    
 12    
 16    
 25    
 32

**Skýring:** Hlutmengi sem innihalda bæði  $a$  og  $b$  má mynda á  $2^4 = 16$  vegu því fyrir hvern hinna fjögurra bókstafanna eru möguleikarnir tveir; að tilheyra hlutmenginu eða ekki.

15. Ef  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$  hvert er gildið á  $\frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}$ ?

- 1    
 2    
 3    
 4    
 5

**Skýring:**  $\frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3 + 2 = 5$

## Þriðji hluti

16. Á fundi heilsar hver maður fimm öðrum mönnum með handabandi. Alls eru sextíu handabönd. Hve margir eru á fundinum?

**Svar:** 24

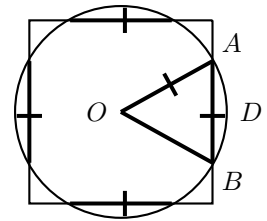
**Skýring:** Ef við margföldum fjölda handabanda hvers manns með fjölda fundarmanna höfum við talið öll handaböndin tvisvar, einu sinni fyrir hvorn aðila. Því er  $5 \cdot n = 2 \cdot 60$  þar sem  $n$  er fjöldi fundarmanna og þá fæst  $n = 120/5 = 24$ .

17. Maður tíni epli og heldur síðan heim til sín. Á leiðinni heim þarf hann að stoppa á þremur tollstöðvum. Á hverri tollstöð er hann beðinn um toll sem nemur helmingi þeirra epla sem hann er með og eitt epli að auki. Þegar maðurinn kemur heim er hann með eitt epli. Hve mörg epli tíndi maðurinn?

**Svar:** 22

**Skýring:** Reiknum aftur á bak: Á hverri tollstöð bætum við aukaeplinu og margföldum með tveimur. Þannig að þegar maðurinn kom að þriðju og síðustu tollstöð hafði hann  $(1 + 1) \cdot 2 = 4$  epli. Þegar hann kom að annarri tollstöð hafði maðurinn  $(4 + 1) \cdot 2 = 10$  epli og þegar hann kom að fyrstu tollstöðinni var hann með  $(10 + 1) \cdot 2 = 22$  epli.

18. Ferningur er teiknaður á hring þannig að þeir hlutar hliða ferningsins sem liggja innan hringsins eru allir jafnir geisla hringsins. Finnið hlutfallið milli flatarmáls hringsins og flatarmáls ferningsins.



**Svar:**  $\frac{\pi}{3}$

**Skýring:** Táknum geisla hringsins með  $r$ . Þríhyrningurinn  $AOB$  er jafnhliða með hliðarlengd  $r$  svo þríhyrningurinn  $OAD$  er rétthyrndur með langhlið  $r$  og skammhlið  $AD = r/2$ . Samkvæmt reglu Pýþagórasar er  $OD = \sqrt{3}r/2$  svo hliðarlengd ferningsins er  $2 \cdot OD = \sqrt{3}r$ . Hlutfallið milli flatarmáls hrings og fernings er þá

$$\frac{\pi r^2}{3r^2} = \frac{\pi}{3}.$$

19. Hversu margar ólíkar útkomur fást með því að leggja saman þrjár ólíkar tölur úr safninu  $\{3, 6, 9, \dots, 27, 30\}$ ?

**Svar:** 22

**Skýring:** Minnsti mögulega summan er  $3 + 6 + 9 = 18$  og stærsta mögulega summan er  $24 + 27 + 30 = 81$ . Summurnar eru allar margfeldi af 3 og því á forminu  $15 + 3k$ . Minnsti summan fæst með því að velja  $k = 1$  og sú stærsta með því að velja  $k = 22$ . Heildarfjöldi mismunandi útkoma er því 22.

20. Lausnir jöfnunnar  $x^2 - 85x + c = 0$  eru frumtölur (prímtölur). Hvert er gildið á  $c$ ?

**Svar:** 166

**Skýring:** Þar sem jafnan hefur frumtölulausnir má þátta vinstri hlið og rita á forminu  $(x-p)(x-q)$  þar sem  $p$  og  $q$  eru frumtölulausnirnar. Þá er  $p+q = 85$  og  $c = pq$ . Þar sem  $p$  og  $q$  eru frumtölur verður önnur talnanna að vera 2 (annars væru báðar tölurnar oddatölur og summan því slétt tala). Ef önnur talnanna er 2 þá verður hin að vera 83 svo summan verði 85. Þá er  $c = 2 \cdot 83 = 166$ .

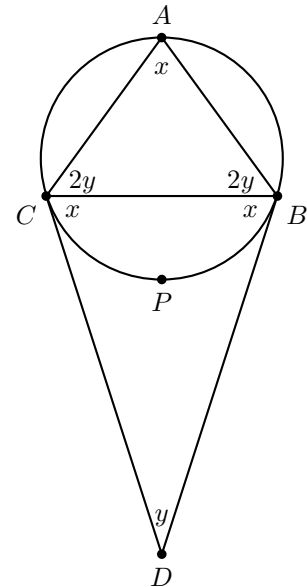
## Fjórði hluti

21. Gefinn er hvasshyrndur jafnarma þríhyrningur  $ABC$  og umritaður hringur hans. Snertlar við hringinn í  $B$  og  $C$  skerast í  $D$ . Einnig er  $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle CDB$ . Finnið hornið  $\angle CAB$ .

**Lausn:** Köllum hornið  $\angle CAB = x$ . Þá er  $\angle BCD = x$  og  $\angle CBD = x$ , því öll spanna þessi horn sama bogann  $CPB$  í hringnum. Köllum hornið  $\angle CDB = y$ . Hornasummur þríhyrninganna  $ABC$  og  $BCD$  má tákna með tilliti til  $x$  og  $y$ :

$$x + 4y = 180^\circ \quad \text{og} \quad 2x + y = 180^\circ$$

Þá fæst að  $x + 4(180^\circ - 2x) = 180^\circ$  og því er  $x = \frac{540^\circ}{7}$ .



22. Finnið allar frumtölur (prímtölur)  $p$ ,  $q$  og  $r$  þannig að  $p > q > r$  og tölurnar  $p - q$ ,  $p - r$  og  $q - r$  séu líka frumtölur.

**Lausn:** Athugum fyrst að tölurnar  $p$ ,  $q$  og  $r$  geta ekki allar verið oddatölur því þá væru frumtölurnar  $p - q$ ,  $p - r$  og  $q - r$  allar sléttar tölur og því allar jafnar 2 (einu sléttu frumtölunni) sem er ómögulegt. Því má álykta að  $r = 2$ .

Frumtölurnar  $p$  og  $q$  verða að vera oddatölur, svo framtalan  $p - q$  er slétt og því er  $p - q = 2$ . En þá er  $p = q + 2$ ,  $p - r = q$  og  $q - r = q - 2$ , svo að  $q$  verður að vera framtala þannig að  $q - 2$  og  $q + 2$  séu líka frumtölur.

Þar sem  $q - 2$ ,  $q$  og  $q + 2$  eru samliggjandi oddatölur er a.m.k. ein þeirra margfeldi af 3 og þar sem tölurnar eru allar frumtölur er ein þeirra 3. Það verður að vera minnsta talan  $q - 2$ , svo  $q = 5$  og  $p = 7$ . Auðvelt er að sjá að þessar tölur uppfylla skilyrði dæmisins.

Einu frumtölurnar sem uppfylla gefnu skilyrðin eru því  $r = 2$ ,  $q = 5$  og  $p = 7$ .