Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2022-2023
Úrslitakeppni
Lausnir

Dæmi 1
Látum p og d vera náttúrlegar tölur þannig að p, $p+d$ og $p+2d$ séu frumtölur og $p \geq 5$. Sýnið að þá sé d margfeldi af 6.

Lausn
Ef d er ekki deilanleg með 2 þá er d oddatala. Þá er önnur talnanna p og $p+d$ slétt og er því jöfn 2 því 2 er eina slétta frumtalan. Nú er $5 \leq p \leq p+d$ en það er í mótsögn við að önnur talnanna p og $p+d$ sé 2. Þetta sýnir að d deilanleg með 2.

Ef d er ekki deilanleg með 3 þá eru hafa tölurnar p, $p+d$ og $p+2d$ mismunandi afganga þegar þeim er deilt með 3 svo að minnsta kosti ein þeirra gefur afganginn 0 þegar henni er deilt með 3. Það þýðir að ein talnanna p, $p+d$ og $p+2d$ er deilanleg með 3 og er því 3 þar sem 3 er eina frumtalan sem er deilanleg með 3. Það er hins vegar í mótsögn við að $5 \leq p \leq p+d \leq p+2d$. Við ályktum því að d sé deilanleg með 3.

Þar sem d er deilanleg með 2 og 3 þá er d deilanleg með minnsta samfeldi þeirra sem er 6. $\square$

Dæmi 2
Finnið allar þrenndir **heiltalna** (a, b, c) sem uppfylla jöfnuhneppið

$$\begin{cases} a - bc = 1 \\ ac + b = 2 \end{cases}.$$

Lausn 1
Gerum ráð fyrir að a, b og c séu heiltölur. Einangrum b úr seinni jöfnunni og fáum

$$b = 2 - ac.$$

Setjum þetta inn í fyrri jöfnuna og fáum

$$a - (2 - ac)c = 1,$$

það er

$$ac^2 - 2c + a - 1 = 0 \tag{1}$$

Skiptum í tilvik eftir því hvort $a = 0$.

1. Gerum ráð fyrir að $a = 0$. Þá verður jafna (1) að jöfnunni

   $$-2c - 1 = 0,$$

   það er $2c = -1$ en það stenst ekki ef c er heiltala. Tilvikið $a = 0$ hefur því enga lausn.

2. Gerum ráð fyrir að $a \neq 0$. Þá er jafna (1) annars stigs jafna í c.

   Greinir jöfnunnar er $d = (-2)^2 - 4 \cdot a \cdot (a-1) = 4 + 4a - 4a^2$, sem er aðeins ≥ 0 þegar $a = 0$ eða $a = 1$. Þar sem $a \neq 0$ þá er $a = 1$.

   Þar sem $a = 1$ þá jafngildir jafna (1) því að

   $$(c-1)^2 = 1,$$

   það er

   $$c - 1 = 1 \vee c - 1 = -1.$$

   Því er $c = 2$ eða $c = 0$.

   (a) Ef $c = 2$ þá verður seinni jafna gefna jöfnuhneppisins að jöfnunni:

   $$2 + b = 2$$

   það er $b = 0$. Við höfum því $(a, b, c) = (1, 0, 2)$ sem sjá má að fullnægir báðum jöfnum jöfnuhneppisins.

   (b) Ef $c = 0$ þá verður seinni jafna gefna jöfnuhneppisins að jöfnunni:

   $$b = 2.$$

   Við höfum því að $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ sem sjá má að fullnægir jöfnuhneppinu.

Við höfum því fundið tvær heiltöluþrenndir (a, b, c) sem fullnægja jöfnuhneppinu, það er $(1, 2, 0)$ og $(1, 0, 2)$. $\square$

Lausn 2

Gerum ráð fyrir að (a, b, c) sé heiltöluþrennd sem fullnægir jöfnuhneppinu. Þá fæst

$$(a - bc)^2 + (ac + b)^2 = 1^2 + 2^2,$$

það er

$$a^2 - 2abc + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc + b^2 = 5.$$

Eftir einföldun og þáttun fæst

$$(a^2 + b^2)(c^2 + 1) = 5. \tag{2}$$

Nú eru $a^2 + b^2$ og $c^2 + 1$ heiltölur og $c^2 + 1$ er jákvæð svo $c^2 + 1 = 1$ eða $c^2 + 1 = 5$. Skiptum í tilvik:

1. Gerum ráð fyrir að $c^2 + 1 = 1$, það er $c^2 = 0$. Þá er $c = 0$. Gefna jöfnuhneppið verður þá

   $$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}.$$

   það er $a = 1$ og $b = 2$. Við höfum því að $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ sem við sjáum að fullnægir jöfnuhneppinu.

2. Gerum ráð fyri rað $c^2 + 1 = 5$, það er $c^2 = 4$. Þá er $c = 2$ eða $c = -2$.

   (a) Gerum ráð fyrir að $c = 2$. Þá verður gefna jöfnuhneppið að

   $$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}.$$

   Sem hefur lausnina $(a, b) = (1, 0)$. Því er $(a, b, c) = (1, 0, 2)$ sem má sannreyna að fullnægir jöfnuhneppunum.

   (b) Gerum ráð fyrir að $c = -2$. Þá verður gefna jöfnuhneppið að

   $$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -2a + b = 2 \end{cases}.$$

   en það hefur engar heiltölulausnir. Því gefur $c = -2$ enga lausn.

Eins og áður þá fáum við að þrenndirnar sem leysa dæmið eru $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ og $(a, b, c) = (1, 0, 2)$. $\square$

Lausn 3

Lítum á c sem fasta og a og b sem breytur. Þá er gefna jöfnuhneppið línulegt og má skrifa á fylkjaformi sem

$$\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ákveða fylkisins

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

er $1 \cdot 1 - c \cdot (-c) = 1 + c^2 > 0$. Af þessu sést að A er alltaf andhverfanlegt og andhverfa þess er

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + c^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

Því fæst að

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + c^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2c}{1+c^2} \\ \frac{-c+2}{1+c^2} \end{pmatrix}.$$

Því er

$$a = \frac{1 + 2c}{1 + c^2} \quad \text{og} \quad b = \frac{-c + 2}{1 + c^2}. \tag{3}$$

Við fáum nú

$$ac^2 - 2c + (a - 1) = 0 \tag{4}$$

Skiptum í tilvik eftir því hvort $a = 0$.

1. Gerum ráð fyrir að $a = 0$. Þá einfaldast jafna (4) í jöfnuna

$$-2c + (-1) = 0$$

en hún hefur enga heiltölulausn fyrir c. Tilvikið $a = 0$ gefur því enga heiltölulausn.

2. Gerum ráð fyrir að $a \neq 0$. Þá er jafna (4) annars stigs jafna. Greinir hennar er $D = (-2)^2 - 4a(a-1) = 4(1 + a - a^2)$. Þar sem c er lausn á annars stigs margliðunni þá er greinirinn $D \geq 0$. Það þýðir að $1 + a - a^2 \geq 0$ eða $a^2 - a - 1 \leq 0$. Þáttum nú $a^2 - a - 1$ og fáum

$$\left(a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0.$$

Þar sem $(1-\sqrt{5})/2 < (1+\sqrt{5})/2$ þá jafngildir ójafnan því að

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Nú er a heiltala og þar sem

$$-1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-\sqrt{1}}{2} = 0$$

og

$$1 = \frac{1+\sqrt{1}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2.$$

þá er $0 \leq a \leq 1$. Þar sem $a \neq 0$ þá er $a = 1$.

Þar sem $a = 1$ þá er greinir jöfnu (4) $D = 4(1 + a - a^2) = 4$ svo lausnir (4) fyrir c eru

$$c = \frac{2-\sqrt{4}}{2} = 0 \quad \text{og} \quad c = \frac{2+\sqrt{4}}{2} = 2.$$

   (a) Ef $c = 0$ þá fæst af jöfnum (3) að $b = (-0+2)/(1+0^2) = 2$. Því er $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ ein lausn upphaflega jönfuhneppsins.

   (b) Ef $c = 2$ þá fæst af jöfnum (2) að $b = (-2+2)/(1+2^2) = 0$. Því er $(a, b, c) = (1, 0, 2)$ ein lausn upphaflega jöfnuhneppisins.

Eins og áður fæst að lausnir jöfnuhneppisins eru $(a, b, c) = (1, 2, 0)$ og $(a, b, c) = (1, 0, 2)$. $\square$

Dæmi 3

Anna og Baldur spila leik sem byrjar með n steina á borði. Þau skiptast á að leika og Anna byrjar. Í hverri umferð þarf leikmaður að taka 1-10 steina af borðinu. Sá sem tekur síðasta steininn af borðinu vinnur. Anna byrjar. Fyrir hvaða n hefur Baldur örugga vinningsleið?

Lausn 1

Þar sem steinunum fækkar í hverri umferð þá er ljóst að leiknum muni ljúka. Því mun annar leikmannanna vinna og hinn tapa. Því sést að Baldur hefur örugga vinningsleið ef og aðeins ef Anna hefur enga örugga vinningsleið. Þar sem báðir leikmenn hafa sömu löglegu leiki fyrir hvern fjöldi steina á borðinu þá er fjöldi steina á borðinu það eina sem skiptir máli til þess að ákvarða hvort sem á leik hafi vinningsleið. Við köllum fjölda steina á borðinu stöðu. Staða er *vinningstaða* ef sá sem á leik hefur vinningsleið en annars er staðan *tapstaða*.

Lokastaðan með enga steina er tapstað því það þýðir að sá sem lék síðast tók síðasta steininn og vann því. Fyrir aðrar stöður þá sést að staða er vinningstaða ef leikmaður getur skilið eftir tapstöðu fyrir mótherja sinn og staða er tapstaða ef allir leikir leiða til vinningstöðu fyrir mótherjan.

Setjum sem að staða k sé tapstaða. Þá eru stöðurnar $k+1$, $k+2$, ..., $k+10$ allt vinningstöður því með því að taka $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ steina í stöðu $k+i$ þá setur sá sem á leik andstæðing sinn í tapstöðu. Ef $k > 0$ er tapstaða þá eru $k-1$, $k-2$, $\ldots k-10$ allt vinningsstöður því annars gæti sá sem á leik skilið eftir tapstöðu fyrir andstæðing sinn. Sér í lagi sést að $k - i \neq 0$ fyrir öll $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ svo $k \geq 11$.

Við sjáum því að 0 er tapstaða, 1, 2, $\ldots 10$ eru vinningstöður, 11 er tapstaða, 12, 13, ..., 21 eru vinningstöður, 22 er tapstaða, 23, 24, ..., 32 eru vinningstöður og svo framvegis. Tilgáta okkar er því að staða k sé vinningstaða ef k er ekki deilanleg með 11 en tapstaða ef k er deilanleg með 11.

Sönnum með þrepun á $k \in \mathbb{N}$ að ef $m \in \{0, 1, \ldots, k\}$ þá sé staða m sé tapstaða ef og aðeins ef m er deilanleg með 11.

1. Nú er staða m tapstaða og m er deilanleg með 11 svo staðhæfingin er sönn fyrir $k = 0$.

2. Gerum ráð fyrir að við höfum sannað staðhæfðinguna fyrir $k \in \mathbb{N}$. Til þess að sanna hana fyrir $k+1$ þá þurfum við sýna að staða $k+1$ sé tapstaða ef og aðeins ef $k+1$ er deilanleg með 11. Skiptum í tilvik eftir því hvort k er deilanleg með 11 eða ekki.

   (a) Gerum ráð fyrir að $k+1$ sé deilanleg með 11. Þá er engin talnanna $(k+1)-1$, $(k+1)-2$, ..., $(k+1)-10$ deilanleg með 11 svo af þrepunarforsendu eru þær allar vinningstöður. Því sést að staða $k+1$ er tapstaða.

   (b) Gerum ráð fyrir að $k+1$ sé ekki deilanleg með 11. Látum r vera afgang deilingar $k+1$ með r. Þar sem $k+1$ er ekki deilanleg með 11 þá er $r \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Nú er $(k+1)-r$ deilanleg með 11 og þar sem $(k+1) - r < k+1$ þá fæst af þrepunarforsendu að staða $(k+1) - r$ er tapstaða. Þetta sýnir að staða $k+1$ er vinningstaða.

Með þrepun á $k \in \mathbb{N}$ fæst að staða m, $m \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ er tapstaða ef og aðeins ef m er deilanleg með 11. Af því leiðir að staða $m \in \mathbb{N}$ er tapstaða ef og aðeins ef m er deilanleg með 11.

Þar sem Anna byrjar þá hefur Baldur örugga vinningsleið ef og aðeins ef Anna byrjar í tapstöðu, það er ef n er deilanleg með 11. $\square$

Lausn 2

Eins og áður þá skulum við kalla fjölda steina í borði stöðu. Ef m og n eru stöður þá segjum við að við komust frá stöðu m í stöðu n ef sá sem á leik í stöðu m getur með leik sínum skilið eftir stöðu n fyrir mótherja sinn. Þannig komust við til dæmis frá stöðu 23 í stöðu 18 en ekki í stöðu 11. Úthlutum nú sérhverri stöðu gildi sem er minnsta náttúrlega talan sem er frábrugðin gildum þeirra staða sem komast má úr gefnu stöðunni. (Þetta eru Grundy-tölunurnar í setningu Sprague-Grundy).

Þannig fær staðan 0 gildið 0 því það er ekki hægt að komast í neina stöðu úr stöðunni 0. Staðan 1 fær gildið 1 því staðan 0 er eina staðan sem má komast í úr stöðunni 1 og hún hefur gildið 0. Með því að reikna nokkur fyrstu gildi staðana þá fæst runan

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nú má þrepa að gildi stöðu k sé afgangur k deilt með 11 fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Þetta er auðvelt að sjá fyrir $k = 0, 1, \dots, 10$. Fyrir $k \geq 10$ þá eru stöðurnar $\{k, k-1, k-2, \dots, k-10\}$ allar ósamleifa mát 11 svo hver þeirra er samleifa nákvæmlega einum leifaflokki mát 11. Af þrepunkarforsendu hafa stöðurnar $k-1$, $k-2$,..., $k-10$ gildi allra afganga mát 11 nema þess sem afgangs sem fæst þegar k er deilt með 11. Af þessu sést að afgangur k deilt með 11 er minnsta náttúrlega talan sem er ekki gildi neinnar staðanna $k-1$, $k-2$, ..., $k-10$.

Skilgreinum vinningsstöðu og tapstöðu eins og síðustu lausn. Sýnum nú með þrepun að staða $k \in \mathbb{N}$ sé tapstaða ef og aðeins ef gildi hennar er 0.

1. Nú er staðan 0 tapstað og gildi hennar er 0.

2. Gerum ráð fyrir að $k \in \mathbb{N}$ og við höfum sannað að staða $n \in \{0, 1, \dots, k\}$ sé tapstaða ef og aðeins ef gildi hennar er 0. Gildi stöðu $k+1$ er 0 ef og aðeins ef engin staðanna sem komast má úr stöðu $k+1$ er 0 en það af þrepunarforsendu jafngildir það að allar stöður sem komast má úr stöðu $k+1$ séu vinningstöður sem aftur jafngildir því að $k+1$ sé tapstaða. Því sést að staða $k+1$ sé tapstaða ef og aðeins ef gildi hennar er 0.

Eins og áður þá hefur Baldur örugga vinningsleið ef og aðeins ef Anna byrjar í tapstöðu. Staða n er tapstaða ef og aðeins ef gildi hennar er 0 en gildi stöðu er afgangur hennar deilt með 11 svo að afgangurinn sé 0 jafngildir því að n sé deilanleg með 11. Þetta sýnir að Baldur hefur örugga vinningsleið ef og aðeins ef n er deilanleg með 11. $\square$

Dæmi 4

Látum Γ vera hring og A, B og C vera þrjá punkta á hringnum þannig að $\triangle ABC$ sé hvasshyrndur. Hæðarlínan frá A sker Γ aftur í punkti D og hæðarlínan frá B sker Γ aftur í punkti E. Sýnið að $\measuredangle ACB = 60^\circ$ ef $|AB| = |DE|$.

Lausn 1

Látum H vera skurðpunkt AD og BE, og X og Y vera fótpunkta hæðanna frá A og B í þessari röð.

Þar sem $\measuredangle AXB = 90^\circ$ fæst af reglu um hornasummu þríhyrnings að $\measuredangle BAX = 90^\circ - \measuredangle ABC$. Sambærilega sést að $\measuredangle ABY = 90^\circ - \measuredangle CBA$.

Með því að leggja þessar jöfnur saman og nota aftur reglu um hornasummu þríhyrnings fáum við að

$$\begin{aligned} \measuredangle ABE + \measuredangle DAB &= \measuredangle ABY + \measuredangle BAX \\ &= 180^\circ - \measuredangle CBA - \measuredangle ABC \\ &= \measuredangle BCA \end{aligned} \tag{5}$$

Þar sem þríhyrningurinn er hvasshyrndur liggja E og D á smærri bogunum CA og BC í þessari röð, svo að punktarnir A, B, D, C og E liggja á hringnum í þessari röð eru bogarnir sem hornin $\angle EBD$ og $\angle ACB$ spanna jafnstórir. Því gildir samkvæmt ferilhornasetningunni að

$$\measuredangle EBD = \measuredangle ACB. \tag{6}$$

Einnig er

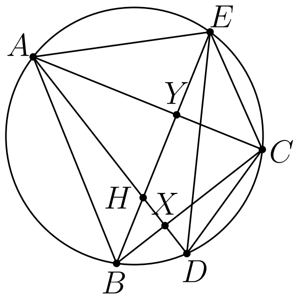
$$\measuredangle EBD + \measuredangle ABE + \measuredangle BCA + \measuredangle DAB = 180^\circ,$$

þar sem þessi horn spanna saman heilan hring.

Með því að nota gildin úr jöfnum (5) og (6) fæst því að

$$3\measuredangle BCA = 180^\circ$$

eða $\measuredangle BCA = 60^\circ$.



$\square$

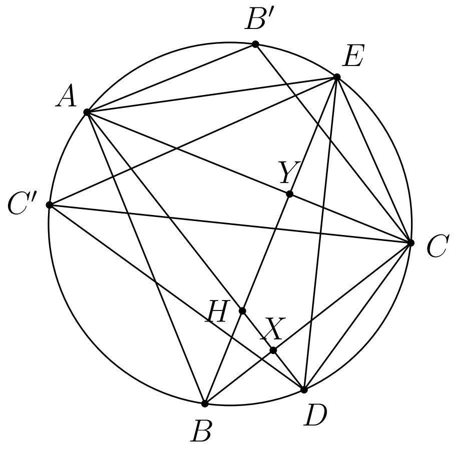
Lausn 2

Látum H vera skurðpunkt AD og BE, það er H er hæðarmiðja $\triangle ABC$. Látum svo X og Y vera fótpunkta hæðanna frá A og B, í þessari röð, á mótlægar hliðar $\triangle ABC$. Látum B' vera spelgun B um miðpunkt Γ. Þá er BB' miðstrengur Γ svo $\angle BAB'$ og $\angle BCB'$ eru rétt. Þar sem H er hæðarmiðja $\triangle ABC$ þá er CH hornrétt á AB. Þar sem AB' er líka hornrétt á AB þá er $CH \parallel AB'$. Eins sést að $AH \parallel CB'$. Af þessu sést að $AHCB'$ er samsíðungur. Sér í lagi er $\triangle AHC \cong \triangle CB'A$ auk þess sem H og B' liggja sitthvoru megin við AC.

Látum P vera speglun H um AB. Þá eru $\triangle AHC \cong \triangle APC$ auk þess sem H og P liggja sitthvoru megin við AC. Því liggja B' og P sömu megin við AC. Þar sem $\triangle CB'A \cong \triangle APC$ þá eru $\angle CB'A$ og $\angle AB'C$ jafnstór. Þar sem B' og P liggja sömu megin við AC þá leiðir að A, C, B' og P liggja öll á sama hring. þar sem A, C og B' liggja á Γ þá liggur P líka á Γ. Þar sem P liggur á BE þá er $P = E$ eða $P = B$. Ef $P = B$ þá væri H speglun B um AC. Þá er B' speglun H um miðpunkt AC og B er spelgun H um Y svo $B'B \parallel HY = AC$. Nú er HB hornrétt á AC svo HB væri hornrétt á BB' sem þýðir að BH sé snertill Γ og því að $E = B$. Við höfum því sýnt að $P = E$, það er E er speglun H um AC. Með sama hætti má sjá að D er speglun H um BC.

Þar sem D og E eru spelglanir H um BC og AC, í þessari röð þá sést að $|CH| = |CD| = |CE|$. Látum C' vera speglun C um miðju Γ. Þá er CC' miðstrengur Γ. Þar sem C, D og E liggja á Γ og $|CD| = |CE|$ þá er CC' miðþerill DE.

Þar sem $\angle ACB$ er hvasst þá liggur X á hálflínunni $[C, B\rangle$. Eins liggur Y á $[C, A\rangle$. Því er $\angle ACY = \angle YCX$. Þar sem D og E eru speglanir H um BC og AC, í þessari röð og $[C, C'\rangle$ er helmingahálflína $\angle DCE$ þá eru $\angle ACB$, $\angle ECC'$ og $\angle C'CD$ öll jafnstór. Því spanna þau jafnlanga strengi svo $|AB| = |EC'| = |C'D|$. Nú er $|AB| = |DE|$ svo $\triangle C'DE$ er jafnhliða. Því er $\measuredangle DC'E = 60°$. Nú spanna $\angle ACB$ og $\angle DC'E$ jafnlanga strengi og eru bæði hvöss svo þau eru jafnstór. Af þessu leiðir að $\measuredangle ACB = \measuredangle DC'E = 60°$. $\square$



Dæmi 5

Á skákmóti eru 12 keppendur og sérhver þátttakandi teflir við alla hina eina skák. Í hverri skák hlýtur sá sem vinnur 1 stig, sá sem tapar 0 stig en sé jafntefli þá hlýtur hvor $\frac{1}{2}$ stig. Eftir mótið eru heildarstig hvers keppanda reiknuð. Einnig eru reiknuð varastig til þess að greina á milli keppenda sem hafa sömu heildarstig. Til þess að reikna varastig keppanda eru lögð saman stig þeirra sem hann sigraði og helmingur stiga þeirra sem hann gerði jafntefli við.

Til dæmis ef keppandi gerir jafntefli við andstæðing sem var með 5 heildarstig þá leggur það $\frac{1}{2} \cdot 5$ til varstiga keppandans. Hins vegar ef hann sigrar leggur það 5 til varastiga keppandans. Sýnið að summa allra varastiga geti mest verið 363.

Lausn

Númerum keppendurnar $1, 2, \ldots, 12$ í einhverri röð. Látum $s_{i,j}$ vera stig sem keppandi i fær úr leik sýnum við keppenda j. Þá er $s_{i,j} \in \{0, 1/2, 1\}$ og $s_{i,j} + s_{j,i} = 1$ fyrir öll $i \neq j$. Þar sem enginn keppir við sjálfan sig þá er $s_{i,i} = 0$ fyrir öll $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Heildarstig keppenda i eru þá $u_i = \sum_{j=1}^{12} s_{i,j}$. Varastig sem keppandi i hlýtur eru því $w_i = \sum_{j=1}^{12} s_{i,j} \cdot u_j$. Summa allra varastiganna er því

$$A = \sum_{i=1}^{12} w_i = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} s_{i,j} \cdot u_j = \sum_{j=1}^{12} u_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} s_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{12} u_j \cdot v_j$$

þar sem $v_j = \sum_{i=1}^{12} s_{i,j}$. Það er

$$A = \sum_{j=1}^{12} u_j \cdot v_j. \tag{7}$$

Nú er

$$u_j + v_j = \left(\sum_{i=1}^{12} s_{j,i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{12} s_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{12}(s_{i,j} + s_{j,i}) = \left(\sum_{i=1}^{12} 1\right) - 1 = 11$$

því $s_{i,j} + s_{j,i} = 1$ ef $i \neq j$ og $s_{i,i} + s_{i,i} = 0$. Látum $x_j = (u_j - v_j)/2$ fyrir öll $j \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Þá er $u_j = 11/2 + x_j$ og $v_j = 11/2 - x_j$.

Af jöfnu (7) fæst að summa varastiganna er

$$\begin{aligned} A = \sum_{j=1}^{12} u_j \cdot v_j &= \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{11}{2} + x_j\right) \cdot \left(\frac{11}{2} - x_j\right) = \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{121}{4} - {x_j}^2\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{12} \frac{121}{4}\right) - \left(\sum_{j=1}^{12} {x_j}^2\right) = 363 - \left(\sum_{j=1}^{12} {x_j}^2\right) \leq 363 \end{aligned}$$

of jöfnuður gildir ef og aðeins ef $x_1 = x_2 = \ldots = x_{12} = 0$. Við höfum því sýnt að summa varastiganna er í mesta lagi 363.

Ef allar skákirnar á mótinu enda í jafntefli þá er $u_i = v_i = 11/2$ fyrir alla keppendur og summa varastiganna er

$$A = \sum_{i=1}^{12} u_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{12} \frac{11}{2} \cdot \frac{11}{2} = 12 \cdot \frac{121}{4} = 363.$$

Þetta sýnir að mesta summa varastiga er því 363. □

Dæmi 6

Sýnið að fyrir $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ og jákvæða heiltölu n gildi að

$$\frac{a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n}{n+1} \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Lausn

Látum $S = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n$.

Því fæst að

$$\begin{aligned} 2S &= (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n) \\ &\quad (b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b^2 + a^{n-1}b + a^n) \\ &= (a^n + b^n) + (a^{n-1}b + ab^{n-1}) + (a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}) + \cdots \\ &\quad + (a^2b^{n-2} + a^{n-2}b^2) + (ab^{n-1} + a^{n-1}b) + (b^n + a^n) \end{aligned}$$

Sýnum nú:

$$
\begin{aligned}
a^n + b^n &\leq a^n + b^n \\
a^{n-1}b + ab^{n-1} &\leq a^n + b^n \\
a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2} &\leq a^n + b^n \\
&\vdots \\
a^2b^{n-2} + a^{n-2}b^2 &\leq a^n + b^n \\
ab^{n-1} + a^{n-1}b &\leq a^n + b^n \\
b^n + a^n &\leq a^n + b^n.
\end{aligned}
$$

Því ef við leggjum þær saman fæst

$$2S \leq (n+1)(a^n + b^n).$$

Með því að deila með $2(n+1)$ fæst

$$\frac{S}{n+1} \leq \frac{a^n + b^n}{2}$$

eins og sýna átti.
Fyrir $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jafngildir

$$a^{n-i}b^i + a^ib^{n-i} \leq a^n + b^n$$

ójöfnunni

$$a^n - a^{n-i}b^i - b^{n-i}a^i + b^n \geq 0.$$

Með þátta fæst

$$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0.$$

1. Ef $a \geq b$ þá er $a^{n-i} \geq b^{n-i}$ og $a^i \geq b^i$ svo $a^{n-i} - b^{n-i} \geq 0$ og $a^i - b^i \geq 0$. Því er

   $$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0$$

   eins og við vildum sýna.

2. Ef $a < b$ þá er $a^{n-i} \leq b^{n-i}$ og $a^i \leq b^i$ svo $a^{n-i} - b^{n-i} \leq 0$ og $a^i - b^i \leq 0$. Því er

   $$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0$$

   eins og við vildum sýna.

Á báðum tilvikum fæst að

$$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \geq 0.$$

sem við vildum sýna. $\square$