



## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2023–2024 Úrslitakeppni

**Athugið:** Notið aðskilin blöð eða arkir fyrir hvert dæmi. Notið eina hlið hvers blaðs/arkar. Þetta skiptir máli við yfirferð. Engar reiknivélar eru leyfðar.

### Dæmi 1

Finnið allar rauntölur  $x, y$  sem uppfylla báðar jöfnurnar

$$x^3 + y^3 = 9 \quad \text{og} \quad x^2y + xy^2 = 6.$$

### Dæmi 2

Jörmunrekur hefur útbúið strimil sem hefur 89 reiti í röð. Á hvern fyrstu 44 reitanna frá vinstri leggur hann einn hvítan stein. Hann leggur svo svartan stein á reitina 44 lengst til hægri. Hann ætlar nú að færa steinana með því að leika eftirfarandi leikjum:

- Færa má hvítan stein til hægri um einn reit ef sá reitur er tómur.
- Færa má svartan stein til vinstri um einn reit ef sá reitur er tómur.
- Víxla má á hvítum og svörtum stein sem eru hlið við hlið ef sá hvíti er vinstra megin.

Það tekur alltaf jafnmarga leiki að komast í stöðu þar sem ekki er hægt að leika lengur. Hvað tekur það marga leiki?

### Dæmi 3

Látum  $\gcd(a, b)$  tákna stærsta samdeili  $a$  og  $b$ , þ.e. stærstu jákvæðu heiltöluna sem gengur upp í bæði  $a$  og  $b$ . Látum  $\text{lcm}(a, b)$  tákna minnsta samfeldi  $a$  og  $b$ , þ.e. minnstu jákvæðu heiltöluna sem bæði  $a$  og  $b$  ganga upp í. Finnið allar jákvæðar heiltölulausnir á jöfnunni

$$\gcd(a, b) + \text{lcm}(a, b) = a + b.$$

### Dæmi 4

Látum  $ABCD$  vera trapisu þar sem hliðin  $AB$  er samsíða hliðinni  $DC$ . Látum  $X$  vera skurðpunkt hornastrikanna  $AC$  og  $BD$ . Drögum línuna  $\ell$  gegnum  $X$  sem er samsíða  $AB$ . Látum  $Y$  og  $Z$  vera skurðpunkta  $\ell$  við hliðarnir  $AD$  og  $BC$ , í þessari röð. Látum  $a$  vera lengd hliðarinnar  $AB$  og  $b$  vera lengd hliðarinnar  $DC$ . Sýnið að lengd striksins  $YZ$  sé  $\frac{2ab}{a+b}$ .

### Dæmi 5

Við Línugötu eru  $n$  hús númeruð frá 1 til  $n$  og í hverju húsi eru kveikt ljós. Á hverjum degi í  $n$  daga ætlar álfur til byggða. Ef álfur kemur á degi  $i$  þá fiktar hann í ljósrofa allra húsa með húsnúmer deilanlegt með  $i$ , svo ef það var kveikt er slökkt eftir á og öfugt. Eftir  $n$  daga er enn kveikt á ljósum í öllum húsum nema í því fyrsta, því sumir álfar slepptu því að koma til byggða til að lágmarka ummerki. Hvaða daga komu álfar til byggða?

### Dæmi 6

Látum  $\mathbb{N}$  vera náttúrlegu tölurnar, 0 þar með talin. Festum  $k \in \mathbb{N}$ . Finnið öll föll  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  þannig að

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$$

fyrir öll  $n \in \mathbb{N}$ . (Hlutstig eru gefin fyrir að leysa jöfnuna fyrir tiltekið  $k$ ).