

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2022-2023 Úrslitakeppni

Athugið: Notið aðskilin blöð eða arkir fyrir hvert dæmi. Notið eina hlið hvers blaðs/arkar. Þetta skiptir máli við yfirferð. Engar reiknivélar eru leyfðar.

Dæmi 1

Látum p og d vera náttúrlegar tölur þannig að p , $p + d$ og $p + 2d$ séu frumtölur og $p \geq 5$. Sýnið að þá sé d margfeldi af 6.

Dæmi 2

Finnið allar þrenndir **heitalna** (a, b, c) sem uppfylla jöfnuhneppið

$$\begin{cases} a - bc = 1 \\ ac + b = 2 \end{cases}.$$

Dæmi 3

Anna og Baldur spila leik sem byrjar með n steina á borði. Þau skiptast á að leika og Anna byrjar. Í hverri umferð þarf leikmaður að taka 1-10 steina af borðinu. Sá sem tekur síðasta steinin af borðinu vinnur. Anna byrjar. Fyrir hvaða n hefur Baldur örugga vinningsleið?

Dæmi 4

Látum Γ vera hring og A , B og C vera þrjú punkta á hringnum þannig að $\triangle ABC$ sé hvasshyrndur. Hæðarlínan frá A sker Γ aftur í punkti D og hæðarlínan frá B sker Γ aftur í punkti E . Sýnið að $\angle ACB = 60^\circ$ ef $|AB| = |DE|$.

Dæmi 5

Á skákmóti eru 12 keppendur og sérhver þátttakandi teflir við alla hina eina skák. Í hverri skák hlýtur sá sem vinnur 1 stig, sá sem tapar 0 stig en sé jafntefli þá hlýtur hvor $\frac{1}{2}$ stig. Eftir mótið eru heildarstig hvers keppanda reiknuð. Einnig eru reiknuð varastig til þess að greina á milli keppenda sem hafa sömu heildarstig. Til þess að reikna varastig keppanda eru lögð saman stig þeirra sem hann sigraði og helmingur stiga þeirra sem hann gerði jafntefli við.

Til dæmis ef keppandi gerir jafntefli við andstæðing sem var með 5 heildarstig þá leggur það $\frac{1}{2} \cdot 5$ til varstiga keppandans. Hins vegar ef hann sigrar leggur það 5 til varstiga keppandans. Sýnið að summa allra varstiga geti mest verið 363.

Dæmi 6

Sýnið að fyrir $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ og jákvæða heiltölu n gildi að

$$\frac{a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n}{n+1} \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$