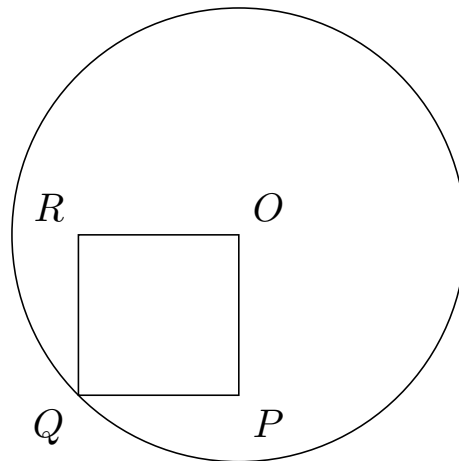


Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2020–2021

Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Rúnar vinnur 200 þúsund krónur. Hann ákveður að gefa Jónu 30% af verðlaununum. Hann skiptir síðan 15% af því sem eftir er jafnt milli Daníels og Láru. Hversu margar krónur gaf Rúnar Láru?

7.000 10.500 14.000 15.000

Skýring: Rúnar gefur Jónu $200 \times 0.3 = 60$ þúsund krónur. 15% af því sem eftir er eru þá $140 \times 0.15 = 21$ þúsund krónur sem skiptast jafnt í tvo hluta, 10500 krónur hvor hluti

2. Hvert er gildið á n ef $2^n = 8^{20}$?

16 20 40 60

Skýring: Þar sem $8 = 2^3$ má rita jöfnuna á formið $2^n = (2^3)^{20} = 2^{60}$. Svo $n = 60$

3. Um jákvæðu heiltölurnar s og t er vitað að $s(s-t) = 29$. Hvert er gildið á $s+t$?

1 29 30 57

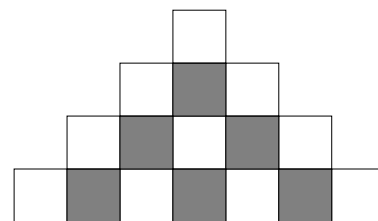
Skýring: Talan 29 er frumtala svo $s(s-t) = 29 = 29 \cdot 1$. Þá verður $s = 29$ og $t = 28$. Svo $s+t = 29+28 = 57$.

4. Geisli hrings er lengdur um 1 metra. Hvert er hlutfall ummáls og þvermáls stækkaðs hrings?

$\frac{\pi}{2}$ π $\pi+1$ ekki vitað

Skýring: Samkvæmt skilgreiningu er π hlutfall ummáls og þvermáls hrings.

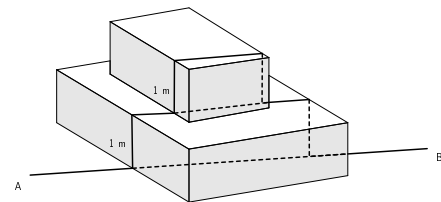
5. Ferningum er raðað eins og sést á mynd. Í fyrstu röð er einn hvítur ferningur, í næstu röð hvítur, grár, hvítur. Hver röð byrjar og endar á hvítum ferningi og hver röð hefur tveimur fleiri ferninga en röðin á undan. Hver er fjöldi grárra ferninga í röð númer 2020?



2018 2019 2020 2021

Skýring: Fjöldi grárra ferninga er alltaf einum minni en númer raðar.

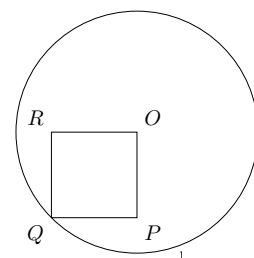
6. Maur röltir daglega 5m langan beinan veg frá A til B . Einn daginn hafa tveir kubbar, sem hvor um sig er 1m á hæð, verið lagðir í veg maursins eins og sýnt er á mynd. Maurinn trítlar nú, ofan frá séð, sama beina veg og áður en fer yfir kubbana líkt og sést á myndinni. Hversu marga metra trítlar maurinn á ferð sinni frá A til B ?



- $9 - 2\sqrt{2}$ 7 9 $5 + 4\sqrt{2}$

Skýring: Ofan frá séð er vegalendin sem maurinn trítlar 5m en við þá vegalengd bætast 4m, 2m upp kubbastæðuna og 2m niður aftur.

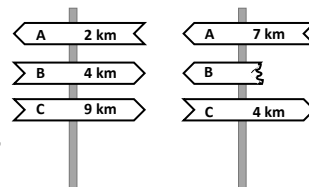
7. Á myndinni er hringur með miðju í O og ferningur $PQRO$ með hornpunkt Q á hringnum. Ef flatarmál hringins er 72π , hvert er þá flatarmál ferningsins $PQRO$?



- 25 36 38 48

Skýring: Strikið OQ , hornalína ferningsins $PQRO$, er jafnt geisla hringins, svo $72\pi = PQ^2\pi$ og því $PQ^2 = 72$. En í ferningi gildir almennt að annað veldi hornalínu er jafnt tvöföldu flatarmáli ferningsins. Flatarmál fernings $PQRO$ er því $\frac{1}{2} \cdot 72 = 36$

8. Stysta leið frá A til C liggur gegnum B . Leggi maður leið sína frá A til C þá verður fyrst á vegi manns skiltastaurinn sem sést til vinstri og svo einhverju síðar skiltastaurinn sem sést til hægri. Hvað á að standa á brotna skiltinu?



- 1 km 2 km 3 km 4 km

Skýring: Þegar að fyrri skiltastaur kemur hefur maður gengið 2 km frá A og á 4 km ófarna í B . Vegalengdin milli A og B er því 6 km. Þegar að seinni skiltastaur kemur hefur maður gengið 7 km frá A og því 1 km fram hjá B .

9. Við skilgreinum tvær nýjar reikniáðgerðir \bowtie og \odot með jöfnum

$$a \bowtie b = a^b \quad \text{og} \quad a \odot b = 2a + b$$

Reiknið gildið á $(16 \bowtie \frac{1}{2}) \odot (2 \bowtie 3)$

 14

 16

 22

 24

Skýring: $16 \bowtie \frac{1}{2} = 16^{1/2} = 4$ og $2 \bowtie 3 = 2^3 = 8$. Svo $(16 \bowtie \frac{1}{2}) \odot (2 \bowtie 3) = 4 \odot 8 = 2 \cdot 4 + 8 = 16$

10. Í poka eru grænar, bláar og rauðar kúlur. Hlutfall grænu kúlanna á móti bláu og svo rauðu er $3 : 4 : 2$. Ef 63 af kúlunum í pokanum eru ekki rauðar, hver er fjöldi rauðra kúlna?

 14

 18

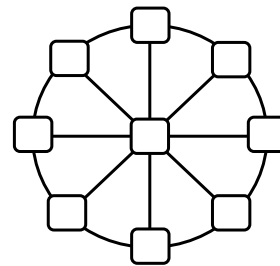
 27

 36

Skýring: Hlutfall ekki rauðra kúlna á móti rauðum kúlum er $7 : 2$, alls 7 hlutar af 9 eru ekki rauðir. Þar sem þesir sjö hlutar gera alls 63 kúlur þá er stærð hvers hluta 9 kúlur. Rauðu kúlurnar, tveir hlutar alls, eru því $2 \cdot 9 = 18$ talsins.

Annar hluti

11. Velja skal jákvæðar heiltölur og setja í reitina. Fyrir sérhverjar þrjár tölur sem liggja á beinni línu í gegnum hringinn verður summa þeirra að vera 13. Summa talnanna átta í reitunum sem liggja á hringnum verður að vera 40. Hvaða tölu þarf að setja í miðjuna til að skilyrði séu uppfyllt?


 1

 3

 5

 7

 9

Skýring: Ef við leggjum saman tölurnar á hverri beinu línanna gegnum miðju hringins þá fæst $4 \cdot 13 = 52$ og þá er miðjutalan talinn 4 sinum. Þar sem summa talnanna á hringum er 40 fæst $52 = 40 + 4 \cdot (\text{miðjutala})$. Miðjutalan er því 3.

12. Gerum ráð fyrir að x og y séu rauntölur þannig að $-4 \leq x \leq -2$ og $2 \leq y \leq 4$. Hvert er stærsta mögulega gildið á $\frac{x+y}{x}$?

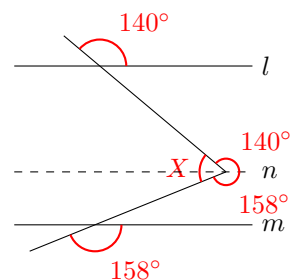
 -1

 $-\frac{1}{2}$
 0

 $\frac{1}{2}$
 1

Skýring: Ritum $\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$. Þar sem $x < 0$ og $y > 0$ þá er $\frac{y}{x} < 0$ og stærðin sem leitað er að því minni en 1. Minnst er dregið frá 1 þegar $y = 2$ og $x = -4$ og þá $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$

13. Armar horns X skera samsíða línur l og m eins og sýnt er á mynd. Hver er stærð hornsins X ?



- 58°
 60°
 62°
 64°
 66°

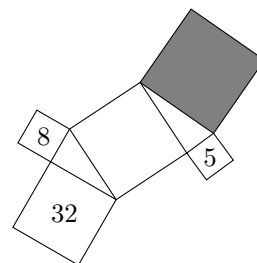
Skýring: Drögum línu n , samsíða l og m , gegnum hornpunkt X . Þá er ljóst að $X = 360^\circ - 140^\circ - 158^\circ = 62^\circ$

14. Edda hljóp 1000 m hlaupabraut á 380 sekúndum. Hún hljóp fyrstu 720 m brautarinnar á 3 m/s jöfnum hraða. Hún hljóp það sem eftir var á jöfnum hraða. Hver var sá hraði?

- 1 m/s
 2 m/s
 3 m/s
 4 m/s
 5 m/s

Skýring: Hún hleypur fyrstu 720 m á $720/3 = 240$ sekúndum. Restina af hlaupinu, $1000-720=280$ m hleypur hún á $380 - 240 = 140$ sekúndum sem gerir $280/140 = 2$ m/s.

15. Myndin er samsett úr 5 ferningum og tveimur rétthyrndum þríhyrningum. Flatarmál þriggja ferninga er 5, 8 og 32 eins og sýnt er. Hvert er flatarmál skyggða ferningsins?



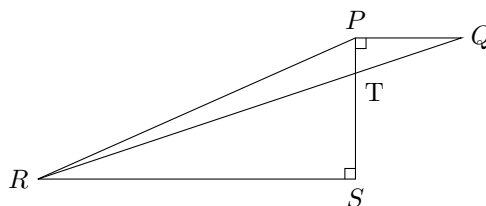
- 19
 29
 35
 45
 75

Skýring: Vísun tvisvar í reglu Pýþagórasar. Flatarmál hvíta tölulausa ferningsins í miðjunni er $32 + 8 = 40$ og því er flatarmál skyggða ferningsins $40 + 5 = 45$.

Þriðji hluti

16. Á myndinni til hliðar eru gefnar lengdirnar $PS = 8$, $PQ = 6$ og $RS = 18$. Hvert er flatarmál þríhyrningsins PTR ?

Svar: 18 flatareiningar



Skýring: Þríhyrningar TPQ og TSR eru einslaga. Nú er $PQ : SR$ er $1 : 3$ svo $PT : TS$ er $1 : 3$. Þar sem $PS = 8$ þá er $PT = 2$ og flatarmál $PRT = \frac{1}{2} \cdot PT \cdot SR = 18$ flatareiningar.

17. Maður ætlar að ganga 40 km. Hann gerir sér grein fyrir því að ef hann gengur 1 km á klst hraðar þá tekur gangan 2 klst skemmri tíma. Hversu hratt (í km á klst.) ætlaði maðurinn sér að ganga í upphafi?

Svar: 4 km á klst.

Skýring: Maðurinn gengur 40 km á x klst. með hraða v km/klst. Hann gengur 40 km á $x-2$ klst. með hraða $v+1$ km/klst. Fáum því að

$$\frac{40}{x} + 1 = \frac{40}{x-2}$$

og þá $x^2 - 2x - 80 = 0$ svo $x = 10$ (x getur ekki verið neikvætt) og hraðinn því 4 km á klst.

18. Við segjum að tala sé *alveg slétt* ef allir tölustafir hennar eru sléttar tölur. Til dæmis eru 864 og 2020 alveg sléttar (0 telst til sléttra tölustafa). Hve margar alveg sléttar tölur eru stærri en 1 og minni en 2020?

Svar: 130

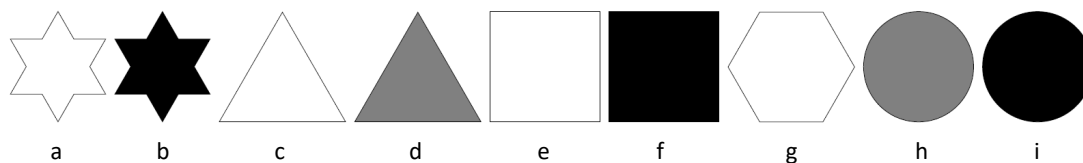
Skýring: Byrjum að telja slíkar tölur á bilinu 1 til 999. Þá veljum við slétta tölu á fimm vegu í hvert þriggja sæta: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Teljum síðan tölur á bilinu frá og með 1000 til og með 2019. Þá veljum við slétta tölu á einn veg í fyrsta sæti (2), einn veg (0) í annað og þriðja sæti og fimm vegu (0, 2, 4, 6, 8) í fjórða sætið: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$. Samtals fást því $125 + 5 = 130$ möguleikar.

19. Ef lengd rétthyrnings er stytta um 10 cm en breiddin aukið um 6 cm þá fæst ferningur sem hefur sama flatarmál og upprunalegi réttyrningurinn. Hvert er þetta flatarmál?

Svar: 225 flatareiningar

Skýring: Ef breidd og lengd rétthyrningsins eru táknaðar með x og y þá fæst að $y - 10 = x + 6$ er hliðarlengd ferningsins. Flatarmálin eru eins svo $xy = (x + 6)(y - 10)$ sem gefur $10x = 6y - 60$. Þar sem $x = y - 16$ fæst með innsetningu að $y = 25$ og þá $x = 9$ svo flatarmálið er $25 \cdot 9 = 15 \cdot 15 = 225$ flatareiningar.

20. Á vegg hanga níu myndir merktar með bókstöfum:



Kári á sér eina uppáhaldsmynd. Ari veit að Bella þekkir hvaða form uppáhaldsmynd Kára hefur. Bella veit að Ari þekkir litinn á uppáhaldsmynd Kára. *Ari segir:* Ég veit ekki hver uppáhaldsmynd Kára er en ég veit að Bella veit það ekki heldur. *Þá segir Bella:* Fyrst vissi ég ekki hver uppáhaldsmynd Kára væri en núna veit ég hver hún er. *Ari:* Nú veit ég það líka. Hvaða bókstafur stendur við myndina sem Kári valdi?

Svar: d

Skýring: Bella þekkir formið og út frá litnum getur Ari dregið þá ályktun að formið eitt dugir ekki til að ákvarða myndina. Formið eitt getur einugis dugað til ákvarða myndina ef myndin væri hvíti sexhyrningurinn. Ari veit að formið dugar ekki til ákvarða myndina. Þar með getur liturinn ekki verið hvítur því þá kæmi hvíti sexhyrningurinn til greina.

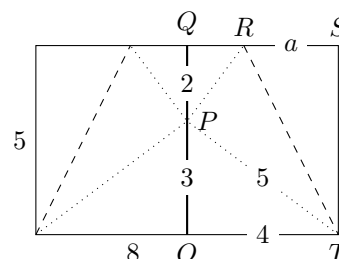
Þegar Bella heyrir að Ari veit að formið eitt dugar ekki til ákvarða myndina áttar hún sig á að liturinn getur ekki verið hvítur og eftir að hvítar myndir hafa verið útilokaðar þá dugar formið til ákvarða myndina. Þar með er ljóst að myndirnar sem koma til greina eru svört stjarna, grár þríhyrningur eða svartur ferningur.

Þegar Ari heyrir svo að nú dugi formið til að ákvarða myndina þá nægir liturinn til ákvarða myndina. Þar með hlýtur rétta myndin að vera grái þríhyrningurinn því liturinn getur ekki skilið á milli svartrar stjörnu og svarts fernings.

Eina myndin sem kemur því til greina er grái þríhyrningurinn.

Fjórði hluti

21. Rétthyrnt blað af lengd 8 cm og breidd 5 cm er brotið eftir strikálínum, eins og sýnt er, þannig að tvö horn blaðsins snertast, eins og punktalínur sýna. Hvert er flatarmál trapisunnar sem myndast við brotið?



Lausn: Aðferð 1 (Regla Pyþagórasar): Segjum að hornin tvö snertist í punkti P . Lína gegnum P hornrétt á langhliðar rétthyrningsins er miðþverill

beggja hliða. Köllum skurðpunktana O og Q . Þá er $OT = 4$ cm og þar sem $PT = TS = 5$ cm verður $OP = 3$ cm (regla Pyþagórasar) og þá $PQ = 2$.

Táknnum lengd SR með a . Þá er $RP = a$ og $RQ = 4 - a$. Með reglu Pýþagórasar fæst $a^2 = 2^2 + (4 - a)^2 = 20 - 8a + a^2$ svo $a = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. Þá er $QR = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ cm og flatarmál trapisunnar því $\frac{1}{2} \cdot (8 + 2QR) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 = 27,5$ cm²

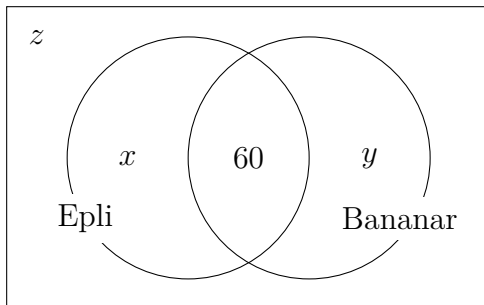
Aðferð 2 (Einslaga þríhyrningar): Lína gegnum P þvert á langhliðar rétt-hyrnings er miðþverill beggja hliða. Þar sem hornið $\angle RPT = \angle RQP = \angle POT = 90^\circ$ þá er $\angle QPR = \angle PTO$. Þríhyrningarnir PQR og POT eru þá einslaga. Sér í lagi gildir að $QR : QP = 3 : 4$ svo $QP = \frac{3}{2}$. Þar sem Q er miðpunktur langhliðar fæst að flatarmál trapisunnar er $\frac{1}{2} \cdot (8 + 2QR) \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 = 27,5$ cm²

22. Hópur nemenda var spurður um banana og epli. Svörin voru á þann veg að

- 30% nemenda fannst epli ekki góð;
- 36 nemendum fannst bananar ekki góðir;
- 60 nemendum fannst bæði epli og bananar góðir;
- 48 fannst aðeins annar ávöxturinn góður en ekki hinn.

Hve mörgum fannst hvorki bananar né epli góð?

Lausn: Teiknum Venn mynd



Upplýsingarnar getum við sett fram í formi jafna m.t.t. x , y og z :

$$x + z = 36 \quad (\text{i})$$

$$x + y = 48 \quad (\text{ii})$$

$$0.3(x + 60 + y + z) = z + y \quad (\text{iii})$$

Ef við drögum jöfnu (ii) frá jöfnu (i) fæst $y - z = 12$. Svo $y = z + 12$. Skoðum nú jöfnu (iii); notum jöfnu (ii) til að einfalda vinstri hlið jöfnu (iii) og notum $y = z + 12$ til að einfalda hægri hlið:

$$0.3(48 + 60 + z) = z + z + 12 \quad \text{svo} \quad \frac{3}{10}(108 + z) = 2z + 12$$

Þá fæst að $324 + 3z = 20z + 120$ og því $z = \frac{204}{17} = 12$. Alls 12 nemendum fannst hvorki bananar né epli góð.

Viðbót: Skv. jöfnu (i) er $x = 36 - 12 = 24$ og skv. jöfnu (ii) er $y = 48 - 24 = 24$. Heildarfjöldi spurðra er því $x + 60 + y + z = 24 + 60 + 24 + 12 = 120$