# 37. Norræna Stærðfræðikeppnin

## Fimmtudagurinn 30. mars 2023

## Icelandic version

*Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.*
*Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og teikniáhöld.*

**Dæmi 1** Alísa og Bína hafa eitthundrað glerkúlur. Í upphafi leiks skipta þær þessum hundrað kúlum í tvær hrúgur. Þar á eftir hefst leikurinn. Leikmaður sem á leik velur aðra af hrúgunum og fjarlægir svo úr henni jákvæðan heiltölufjölda kúlna úr þeirri hrúgu, en þó ekki fleiri en helming kúlanna í þeirri hrúgu. Fyrsti leikmaðurinn sem ekki getur fjarlægt neinar kúlur tapar leiknum. Leikmennirnir skiptast á að leika og Alísa leikur fyrsta leikinn. Finnið allar upphafstærðir á hrúgunum þannig að Bína hafi örugga vinningsleið.

**Dæmi 2** Látum $\mathbb{N}_+$ tákna mengi jákvæðra heiltalna. Finnið öll föll $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ þannig að

$$\gcd(f(x), y)f(xy) = f(x)f(y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{N}_+$. (Ef $a$ og $b$ eru heiltölur þá stendur $\gcd(a, b)$ fyrir stærsta samdeili þeirra).

**Dæmi 3** Finnið allar heiltölurunur $a_0, a_1, a_2, \ldots$ þannig að fyrir allar heiltölur $k, \ell \geq 0$ gildi

$$a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2,$$

það er að fyrir allar heiltölur $k, \ell \geq 0$, sé til heiltala $z$ þannig að $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$.

**Dæmi 4** Látum $ABC$ vera þríhyrning og $M$ vera miðpunkt hliðarinnar $BC$. Látum $E$ og $F$ vera punktana á hliðunum $AC$ og $AB$, í þessari röð, þannig að $ME = MF$. Látum $D$ vera hinn skurðpunkt umhrings þríhyrningsins $MEF$ við hliðina $BC$. Látum $\ell_D, \ell_E$ og $\ell_F$ vera línurnar um $D$, $E$ and $F$, í þessari röð, þannig að $\ell_D \perp BC$, $\ell_E \perp CA$ og $\ell_F \perp AB$. Sýnið að $\ell_D$, $\ell_E$ og $\ell_F$ liggi allar um sama punkt.