

Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

7. október 2014
Tími: 2½ klukkustund

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2014–2015

Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Landsnet styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema.

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Ef $\frac{1/w + 1/z}{1/w - 1/z} = 2014$ þá er $\frac{w + z}{w - z}$ jafnt og

-2014

$\frac{-1}{2014}$

2014

$\frac{1}{2014}$

2. Jón gekk framhjá fjórum húsum í röð, í sínum lit hvert. Hann gekk framhjá appelsínugula húsinu á undan rauða húsinu. Hann gekk framhjá bláa húsinu á undan gula húsinu. Bláa húsið er ekki við hliðina á gula húsinu. Á hve marga vegu getur röð húsanna verið?

2

3

4

5

3. Gefið er að x og y eru rauntölur, hvorug núll og $x \neq y$. Hvert er gildið á xy ef $x + \frac{2}{x} = y + \frac{2}{y}$?

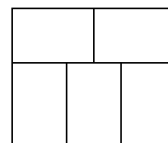
$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

2

4

4. Rétthyrningur er samsettur úr 5 eins rétthyrningum eins og myndin sýnir. Hvert er flatarmál stóra rétthyrningsins ef vitað er að ummál hvers lítils rétthyrnings er 20 m?



72 m²

112 m²

120 m²

140 m²

5. Í sendingu af kössum er einn fjórði af kössunum tómur. Opnaður er einn fjórði hluti kassanna og einn fimmti þeirra er ekki tómur. Hve stór hluti óopnuðu kassanna er tómur?

$\frac{4}{15}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{15}$

$\frac{1}{16}$

6. Jafnan $x^2 - 7x + c = 0$ hefur lausnir a og b . Finnið gildið á c ef $a^2 + b^2 = 81$.

 -12

 -15

 -16

 -18

7. Ylfa æfir hlaup og ætlar að hlaupa fjóra hringi á meðalhraðanum 16 km/klst. Meðalhraði Ylfu reynist vera 15 km/klst fyrstu þrjá hringina. Hver þarf meðalhraði Ylfu á fjórða hring að vera til að hún nái markmiðinu?

 18

 19

 20

 21

8. Hversu margar þriggja stafa tölur abc eru þannig að $a > b > c$ og ein talnanna er 5?

 30

 36

 46

 50

9. Fjórar stelpur, Anna, Bára, Dagný og Elín sungu á tónleikum og aðeins þrjár saman hvert lag. Elín söng í flestum laganna, alls sjö og Anna söng í fæstum laganna, alls fjórum. Hve mörg lög sungu stelpurnar á tónleikunum?

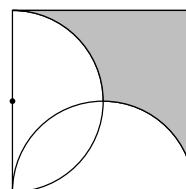
 7

 8

 9

 11

10. Tveir hálfhringir eru innritaðir í ferning með hliðarlengd 2. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?


 2

 $3 - \pi$
 $\pi - 2$
 $3 - \pi/2$

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Það tekur hóp múrara 5 klst. að ljúka ákveðnu múrverki. Væru þeir einum fleiri tæki sama verk 4 klst. Allir vinna jafn hratt og jafn mikið. Hve langan tíma tæki það einn múrara að ljúka verkinu?

Svar: _____

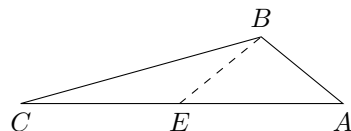
12. Tölurnar a , b , c , d og e uppfylla jöfnurnar

$$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5.$$

Hver talnanna fimm er stærst?

Svar: _____

13. Í þríhyrningi ABC er $AB = 5$ og $BC = 11$. Valinn er punktur E á hlið AC þannig að $EC = 7$ og $EB = AB$. Hver er lengdin á AE ?



Svar: _____

14. Tölurnar m og n eru jákvæðar heiltölur og $m > n$. Þegar m er deilt með n er afgangurinn 24 og þegar $2m$ er deilt með n er afgangurinn 11. Hver er talan n ?

Svar: _____

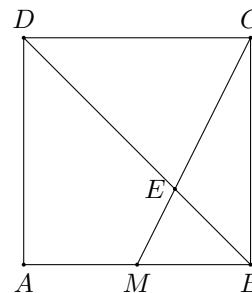
15. Hvert er gildið á x ef $\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$?

Svar: _____

Þriðji hluti

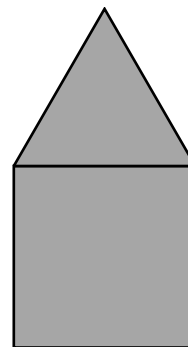
Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Punktur M er miðpunktur hliðar AB í ferningi $ABCD$. Punktur E er skurðpunktur hornalínu BD og miðlínu CM . Hvert er hlutfall flatarmáls þríhyrnings BCE og ferhyrnings $ADEM$?



17. Finnið öll pör (a, b) jákvæðra heiltalna sem eru þannig að $a > b$ og mismunur stærðanna $a^2 + b$ og $a + b^2$ er framtala (prímtala).

18. Gefnir eru jafnhliða þríhyrningur með hliðarlengd 1 og ferningur með hliðarlengd 1. Hægt er að raða þeim saman þannig að þeir mynda kúptan 5-hyrning eins og myndin sýnir (marghyrningur er kúptur ef allar hornalínur liggja innan marghyrningsins).
Er hægt að raða saman slíkum þríhyrningum og ferningum svo þeir myndi annars vegar kúptan 7-hyrning og hins vegar kúptan 13-hyrning?



19. Sannið að ekki sé hægt að finna fjórar jákvæðar heiltölur a , b , c og d þannig að

$$a^2 + b^2 + c^2 - 7d^2 = 0$$