

Fyrsti hluti

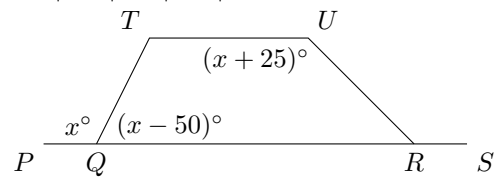
Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Hver er útkoman þegar $1 - (2 - 3) - (4 - 5) - (6 - 7) - (8 - 9)$ er reiknað?

-5 -1 1 5

Skýring: Fáum $1 - (-1) - (-1) - (-1) - (-1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$.

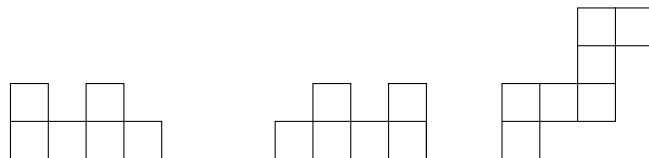
2. Á myndinni er TU samsíða PS og punktarnir Q og R liggja á PS . Stærðir hornanna $\angle PQT$, $\angle RQT$ og $\angle TUR$ eru sýndar myndinni. Hver er stærð hornsins $\angle URS$?



125° 130° 135° 140°

Skýring: $2x - 50^\circ = 180^\circ$ gefur að $x = 115^\circ$ og $\angle URS$ er grannhorn hornsins $\angle TUR$ svo $\angle URS = 115^\circ + 25^\circ = 140^\circ$

3. Sigrún límdi saman kubba sem allir voru jafnstórir líkt og sést hér að neðan:



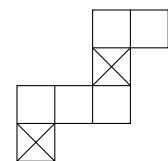
Horft framan á Horft frá vinstri hlið Horft ofan á

Hversu margna kubba notaði Sigrún?

6 9 10 11

Skýring:

Með því að horfa ofan á bygginguna sést að kubbararnir eru að minnsta kosti sjö. Þegar við samtvinnum upplýsingar allra teikninganna þriggja sést að einn kubbur bætist ofan á tvo kubba sem merktir eru með krossi á teikningunni. Samtals er því um níu kubba að ræða.



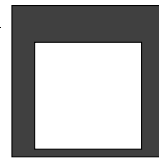
Horft ofan á

4. Aðgerðin \star er skilgreind með jöfnunni $a \star b = a^2b - ab^2$. Hvert er gildið á $2 \star 7$?

-140 -70 0 70

Skýring: $2 \star 7 = 2^2 \cdot 7 - 2 \cdot 7^2 = 28 - 98 = -70$

5. Á myndinni sést lítill ferningur innan í stærri ferningi. Flatarmál skyggða svæðisins og flatarmál óskyggða svæðisins eru bæði 18 cm^2 . Hver er hliðarlengd stærri ferningsins?



- 3 cm 4 cm 6 cm 9 cm

Skýring: Heildarflatarmálið er 36 fersentimetrar svo hliðarlengdin er 6 .

6. Bolli Þjalla byrjaði á hægri endanum og er búinn að trítla $\frac{3}{4}$ af stönginni. Mæja maur byrjaði á vinstri endanum og er búin að trítla $\frac{2}{3}$ af stönginni. Hversu stór hluti stangarinnar skilur á milli Bolla og Mæju?



- $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{12}$

Skýring: Bilið milli þeirra er $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$.

7. Thelma slær 2^k inn í vasareikni. Hún ýtir síðan alls n sinnum á $\sqrt{\quad}$ takkann eða þar til vasareiknirinn sýnir töluna 2 . Hvert er gildið á k ?

- $2n$ n 2^n n^n

Skýring: Í hvert sinn sem Thelma ýtir á $\sqrt{\quad}$ þá er hún í raun að hefja í veldið $1/2$ sem svarar til margföldunar með $1/2$ í veldisvísi. Að ýta n sinnum á $\sqrt{\quad}$ jafngildir því að margfalda n sinnum með $1/2$ í veldisvísi; að margfalda með $1/2^n$ í veldisvísi. Því er $k \cdot (1/2^n) = 1$ svo $k = 2^n$.

8. Á teningi er tala á hverri hlið. Summa mótlægra hliða er sú sama. Fimm talnanna eru $5, 6, 9, 11$ og 14 . Hvaða tala er á sjöttu hliðinni?

- 7 8 13 15

Skýring: Samlagning allra talnanna gefur 45 . Talan sem bætist á teninginn þarf að gera summuna þannig að hún sé deilanleg með 6 og eina talan sem getur það er 15 . Mótlægar hliðar eru 5 og $15, 6$ og 14 og 9 og 11 .

9. Í samlagningunni tákna x, y og z tölustafi. Hvert er gildið á $x + y + z$?

$$\begin{array}{r}
 x \ y \ z \\
 + \ x \ y \ z \\
 + \ \ \ \ y \ z \\
 \hline
 \end{array}$$

1 6 7 5

8

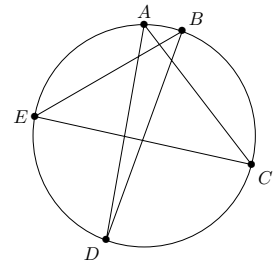
10

15

20

Skýring: Höfum að $3z = 5$ gengur ekki þar sem z er heiltala. $3z = 25$ eða $3z = 35$ gengur ekki heldur þar sem z er heiltala og $z < 10$. Fáum að $3z = 15$ og því $z = 5$. Þar sem tugurinn færir til samlagningar við y -in fæst að $3y + 1 = 7$ eða $3y + 1 = 17$ en það síðarnefnda gengur ekki þar sem y er heiltala og því fæst að $y = 2$. Loks fæst að $2x = 16$ svo $x = 8$. Samtals eru þá $x + y + z = 5 + 2 + 8 = 15$.

10. Fimm punktar á hring eru tengdir með strikum og mynda fimm horna stjörnu eins og sýnt er á mynd. Hver er samanlögð stærð hornanna í stjörnunni, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$?



160°

180°

240°

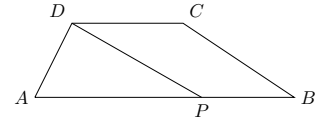
360°

Skýring: Hornin í stjörnunni eru öll ferilhörn og samtals spanna þau allan hringinn. Ferilhörn eru jöfn helmingi þess boga sem þau spanna að stærð og því fæst að samanlögð stærð hornanna er $360^\circ/2 = 180^\circ$.

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm spurningar. Hver spurning er fjögurra stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

11. Í trapisunni er $AB = 40$ og $CD = 16$. DP skiptir trapisunni í tvo hluta með sama flatarmál. Hver er lengd AP ?



- 16 20 28 32 36

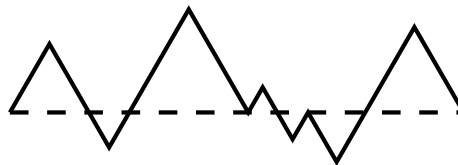
Skýring: VANTAR!

12. Hvert er gildið á $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3}$ ef vitað er að $x + 2y = 30$?

- 8 16 18 20 30

Skýring: Gerum öll brotin samnefnd og fáum $\frac{3x+10y+6y+5x}{15} = \frac{8x+16y}{15} = \frac{8(x+2y)}{15}$ en þar sem $x + 2y = 30$ þá er $\frac{8(x+2y)}{15} = \frac{8 \cdot 30}{15} = 8 \cdot 2 = 16$.

13. Brotalínustrikið er 20 cm að lengd. Þríhyrningarnir eru allir jafnhliða. Hver er lengd svarta ferilsins?



- 25 cm 30 cm 35 cm 40 cm 45 cm

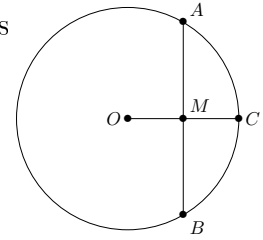
Skýring: Þríhyrningarnir eru allir jafnhliða og hver þeirra hefur eina hlið á brotalínunni og tvær hliðar á svarta ferlinum. Því fæst að svarti ferillinn er tvöfalt lengri heldur en brotalínuferillinn.

14. Anna á 2000 krónur. Systur hennar fjórar eiga 1000 krónur hver. Anna vill skipta jafnt þannig að þær eigi allar jafnmikið, systurnar fimm. Hversu háa upphæð þarf hún að gefa hverri systra sinna til að þetta gangi upp?

- 100 kr. 150 kr. 200 kr. 250 kr. 300 kr.

Skýring: Samtals eru þetta 6000 krónur sem skiptast milli systranna fimm og hver þeirra fær því 1200 krónur þegar allar fá jafnt. Anna gefur hverri systra sinna 200 krónurnar sem upp á vantar.

15. Hringur hefur miðju O . Strengurinn AB er miðþverill geislans OC . Hvert er flatarmál hringins, í cm^2 , ef $AB = 8\sqrt{3}$ cm?



- 36π 48π 64π 96π 112π

Skýring: Sjáum að $AM = 4\sqrt{3}$, $OM = \frac{r}{2}$ og $OA = r$ eru hliðar í rétthyrndum þríhyrningi og því gildir regla Pýþagórasar: $(4\sqrt{3})^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$. Fáum $16 \cdot 3 + \frac{r^2}{4} = r^2$ sem gefur $16 \cdot 3 \cdot 4 + r^2 = 4r^2$ og þá $r^2 = 16 \cdot 4$ svo $r = 4 \cdot 2 = 8$ og flatarmál hringins er þá $F = 8^2\pi = 64\pi$.

Priðji hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16. Tommi skrifaði niður allar tölurnar frá og með 1 til og með 20 í belg og biðu og fékk þannig 31-stafs töluna 1234567891011121314151617181920. Síðan eyddi hann 24 af þessum 31 tölustaf þannig að talan sem eftir varð var eins stór og mögulegt var. Hvaða tala varð eftir?

Svar: 9781920

Skýring: Við leitum að sjö stafa tölu og viljum hafa sem hæstan tölustaf fremst í henni. Byrjum því á að strika út átta fyrstu stafina en höldum 9 eftir sem fremsta tölustaf í tölunni stóru. Sjáum að við getum ekki strikað út níttján stafi til viðbótar til að komast að næstu 9 (þar sem talan væri þá ekki lengur sjöstafa) og ekki komumst við heldur að næstu áttu. Strikum því út fimmtán stafi út að 7 og síðan strikum við út ásinn milli 7 og 8. Þá er búið að strika út tuttugu og fjórar tölur og eftir stendur 9781920.

17. Látum $\frac{a}{b}$ vera fullstýtt brot sem má einnig rita sem summu $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ þar sem n er jákvæð heiltala. Finnið brotið þegar gefið er að $a + b = 1024$.

Svar: $\frac{63}{961}$

Skýring: Fáum að $\frac{a}{b} = \frac{2n+1}{n^2}$ og þá $a + b = 2n + 1 + n^2 = 1024$ sem gefur $(n + 1)^2 = 1024$ og því $n + 1 = 32$ svo $n = 31$ og þá fæst $\frac{a}{b} = \frac{63}{961}$.

18. Hver er fjöldi heiltalna n þannig að $\frac{1}{7} \leq \frac{6}{n} \leq \frac{1}{4}$.

Svar: 19

Skýring: Fáum út frá fyrri hluta ójöfnunnar að $n \leq 42$ og út frá seinni hluta ójöfnunnar að $n \geq 24$ og þarna á milli eru alls 19 heiltölur.

19. Talnarunan 2,3,6,8,8,... er útbúin með því að skrá fyrst 2 og 3 og síðan einingartölu margfeldis talnanna tveggja á undan. Hver er tala númer 2017 í þessari talnarunu?

Svar: 2

Skýring: Talnarunan er 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, ... þar sem lota með sex tölustöfum 8, 8, 4, 2, 8, 6 endurtekur sig ítrekað eftir fyrstu þrjá stafina. Höfum að $2017 - 3 = 2014$ og $4 \equiv 2014 \pmod{6}$ og fjórða talan í lotunni er 2.

20. Fimm línur, sem allar liggja samsíða einni hlið þríhyrnings, skipta hinum tveimur hliðum þríhyrningsins upp í 6 jafnstór bil og þríhyrningnum sjálfum í 6 svæði. Hvert er flatarmál þríhyrningsins ef flatarmál stærsta svæðisins er 33 flatareiningar?

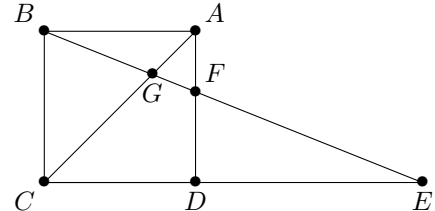
Svar: 108

Skýring: Allir þríhyrningarnir sem línurnar mynda eru einslaga. Köllum hæð og grunnlínu í stærsta þríhyrningnum h og g . Þá eru hæð og grunnlína næststærsta þríhyrningsins $\frac{5}{6}h$ og $\frac{5}{6}g$. Fáum að $33 = hg - \frac{25}{36}hg$ sem gefur $33 = \frac{11}{36}hg$ og þá $hg = 108$.

Fjórði hluti

Í þessum hluta eru tvö dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

21. Ferningur $ABCD$ er þannig að hornpunkturinn D liggur á strikinu CE , strikið BE sker strikið AC í punktinum G og strikið AD í punktinum F . Hver er lengd striksins EF ef vitað er að $BG = 3$ m og $GF = 1$ m?



Myndin er **ekki** í réttum hlutföllum

Lausn: Sjáum að þríhyrningarnir BEC , FED og FBA eru einslaga af því að þeir eru allir rétthyrndir og annars vegar eru strikin BC og FD samsíða og hins vegar þá eru hornin $\angle BFA$ og $\angle DFE$ topphorn.

Einnig fæst að GCB og GAF eru einslaga af því að hornin $\angle CBG$ og $\angle AFG$ eru eins og hornin $\angle BCG$ og $\angle GAF$ eru bæði 45° .

Hlutföll milli hliða í GCB og GAF gefa að $\frac{1}{3} = \frac{AF}{BC}$ svo $BC = 3AF$. Vitum að $AF + FD = BC$ svo $AF + FD = 3AF$ og þá $FD = 2AF$.

Hlutföll milli hliða í FED og BEC gefa $\frac{x}{x+4} = \frac{2AF}{3AF}$ svo $3x = 2(x+4)$ og þá $x = 8$.

22. Ferningstala er tala sem er annað veldi heillar tölu. Töluna a má rita sem summu tveggja ólíkra ferningstalna. Sýnið að þá megi einnig rita töluna $2a$ sem summu tveggja ólíkra ferningstalna.

Lausn: Rita má töluna a sem summu tveggja ólíkra ferningstalna svo $a = x^2 + y^2$. Við megum gera ráð fyrir að $x > y > 0$. Þá er líka $x + y > x - y > 0$ og einnig gildir $(x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2a$. Þar með er hægt að skrifa $2a$ sem summu tveggja ólíkra ferningstalna.