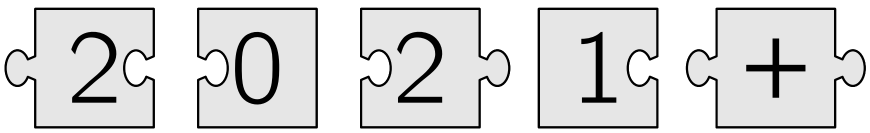
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2021–2022

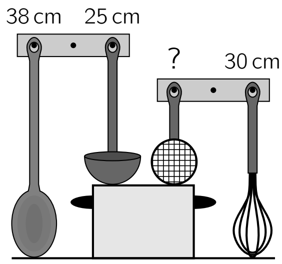
Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Eldhúsáhöld hanga á snögum á vegg. Hversu langt er sigtið?



15 cm 7 cm 17 cm 20 cm

Skýring: Ef við drögum lengd písksins frá lengd sleifarinnar þá fæst að það munar 38 cm − 30 cm = 8 cm á lengd ausunnar og sigtisins. Því er sigtið 25 cm − 8 cm = 17 cm að lengd.

2. Hvert eftirtaldra brota er stærst?

$\frac{4+3}{2}$ $\frac{4}{3+2}$ $\frac{3+2}{4}$ $\frac{3}{4+2}$

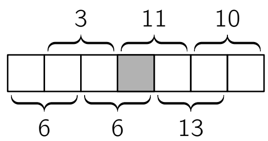
Skýring: Í það heila fæst að:

$$\frac{4+3}{2} = \frac{14}{4} > \frac{5}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{25}{20} > \frac{16}{20} = \frac{4}{3+2} = \frac{24}{30} > \frac{15}{30} = \frac{3}{4+2}$$

Önnur aðferð (það er með keðjubrotum) er að athuga að:

$$\frac{4+3}{2} = 3 + \frac{1}{2}, \qquad \frac{4}{3+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \qquad \frac{3+2}{4} = 1 + \frac{1}{4} \qquad \frac{3}{4+2} = \frac{1}{2}$$

3. Regína raðar tölustöfunum 1,2,3,4,5,6,7 í reitina til hægri. Tölurnar við slaufusvigana standa fyrir summu nágrannatalna. Hvaða tölustafur verður að standa í gráa reitnum til að þetta gangi upp?



2 3 4 5

Skýring: Til að fá summuna 3 út úr öðru og þriðja sæti þá er eina leiðin að nota 1 og 2.

Prófum að setja aðra töluna sem 1. Þá þarf fyrsta talan að vera 6 − 1 = 5, þriðja talan þá 3 − 1 = 2, og fjórða talan 6 − 2 = 4 og svo framvegis. Við fáum því að tölurnar eru 5, 1, 2, 4, 7, 6, 4 sem stenst ekki þar sem 4 kemur tvisvar fyrir en 3 aldrei.

Prófum því að setja aðra töluna sem 2. Með sömu aðferð og áður fæst röðin 4, 2, 1, 5, 6, 7, 3 sem er lausn. Þetta sýnir að talan í miðjunni er 5.

4. Í dæminu hér til hliðar standa P, Q og R fyrir ólíkar jákvæðar heiltölur (allar mini en 10). Hvert er gildið á $P+Q+R$?

$$\begin{array}{cccc} & P & 7 & R \\ + & 3 & 9 & R \\ \hline & R & Q & 0 \end{array}$$

3 12 13 14

Skýring: Með því að skoða einingarsætið þá fæst $R = 0$ eða $R = 5$. Þar sem summan getur ekki verið lægri en það sem lagt er saman, þá er $R = 5$. Því flyst einn í tugasætið þegar einingarnar eru lagðar saman, svo $Q = 7$. Við þurfum því að flytja einn í hundraðasætið við samlagningu tuganna, svo $P+3+1 = R = 5$. Því er $P = 1$. Fáum loks $P + Q + R = 1 + 7 + 5 = 13$.

5. Nokkrar vinkonur eiga saman poka af karamellum og borða úr honum á fjórum dögum en skilja síðan afganginn eftir.

Á fyrsta degi borða þær $\frac{1}{2}$ af karamellunum í pokanum.
Á öðrum degi borða þær $\frac{2}{3}$ af karamellunum sem eftir eru.
Á þriðja degi borða þær $\frac{3}{4}$ af karamellunum sem eftir eru.
Á fjórða degi borða þær $\frac{4}{5}$ af karamellunum sem eftir eru.

Hvað voru í minnsta lagi margar karamellur í pokanum í upphafi, áður en vinkonurnar byrjuðu að borða þær?

60 120 180 240

Skýring: Gerum ráð fyrir að n sé fjöldi karamella sem eru upphaflega í pokanum.

Á fyrsta degi borða vinkonurnar helming karamellanna það er $\dfrac{n}{2}$ karamellur og skilja $\dfrac{n}{2}$ karamellur eftir.

Á öðrum degi borða vinkonurnar tvo þriðjuga af þeim karamellum sem eftir eru og skilja þar með eftir þriðjung af þeim karamellum sem eftir eru. Þær skilja því eftir $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{n}{2} = \dfrac{n}{6}$ karamellur eftir.

Á þriðja degi borða vinkonurnar þrjá fjórðunag af þeim karamellum sem eftir eru og skilja þar með eftir fjórðung af þeim karamellum sem eftir eru. Þær skilja því eftir $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{n}{6} = \dfrac{n}{24}$ karamellur eftir.

Á fjórað degi borða vinkonurnar fjóra fimmtunga af þeim karamellum sem eftir eru og skilja þar með eftir fimmtung af þeim karamellum sem eftir eru. Þær skilja því eftir $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{n}{24} = \dfrac{n}{120}$ karamellur eftir.

Á hverjum degi er heiltölu fjöldi karamella eftir í pokanum svo $n, \dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{6}, \dfrac{n}{24}, \dfrac{n}{120}$ eru allt heiltölur.

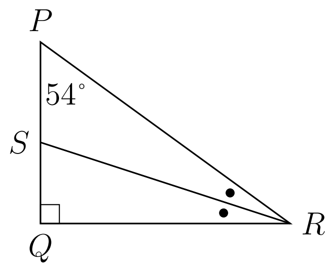
Það þýðir að $1, 2, 6, 24, 120$ ganga allar upp í n en það þýðir að n sé samnefnari $1, 2, 6, 24, 120$. Minnsti samnefnari þessara talna er 120 svo n er að minnsta kosti 120. Það er í upphafi eru að minnsta kosti 120 karamellur í pokanum.

6. Auðun álfur og Trausti tröll hittast. Auðun segir alltaf satt og Trausti lýgur alltaf. Báðir segja nákvæmlega sömu setninguna. Hvaða setning getur það verið?

Við segjum báðir satt	Ég lýg alltaf	Ég segi satt	Annar okkar segir satt og hinn lýgur

Skýring: Þriðji valkosturinn er sá eini sem gengur upp af því að Auðun getur sagt (satt frá) að hann segi satt og eins getur Trausti sagt (ósatt) að hann segi satt. Hinir valkostirnir ganga ekki upp vegna þess að a) Þar sem Auðun segir alltaf satt þá getur hann ekki sagt að þeir segi báðir satt, b) Þar sem Auðun segir alltaf satt þá myndi hann ekki segja að hann lygi alltaf, og c) Þar sem það er satt að annar þeirra segi satt en hinn ljúgi þá getur Trausti ekki sagt neitt slíkt.

7. Á myndinni er PQR rétthyrndur með Q rétt og $\measuredangle QPR = 54°$. Punktur S liggur á PQ þannig að $\measuredangle PRS = \measuredangle SRQ$. Hvað er $\measuredangle QSR$ stórt?



18° 36° 54° 72°

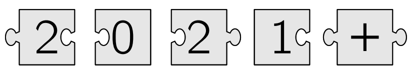
Skýring:

Nú er $\measuredangle PQR = 90^\circ$ og $\measuredangle QPR = 54^\circ$. Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° þá fæst að $\measuredangle PQR + \measuredangle QPR + \measuredangle PRQ = 180^\circ$. Það er $\measuredangle PRQ = 180^\circ - \measuredangle PQR - \measuredangle QPR = 180^\circ - 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Þar sem $\measuredangle PRS = \measuredangle SRQ$ og $\measuredangle PRS + \measuredangle SRQ = \measuredangle PRQ$. Þá fæst að $2 \cdot \measuredangle SRQ = \measuredangle PRQ = 36^\circ$. Því er $\measuredangle SRQ = 18^\circ$.

Nú er $\measuredangle SQR = \measuredangle PQR = 90^\circ$. Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° þá er $\measuredangle SQR + \measuredangle SRQ + \measuredangle QSR = 180^\circ$. Því er $\measuredangle QSR = 180^\circ - \measuredangle SQR - \measuredangle SRQ = 180^\circ - 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

8. Með því að raða þessu rétt saman fæst reikningsdæmi. Hver er útkoman úr því dæmi?



22 32 41 122

Skýring:

Köllum bútana a), b), c), d) og e) í þessari röð. Við sjáum að d) hlýtur að vera vinstri endabútur. Hægra megin við d) getur aðeins bútur a) eða púsl e) verið. Bútur d) er ekki endabútur og eini búturinn sem getur verið hægra megin við hann er bútur e). Við álytkum því að bútur a) sé næst hægra megin við bút d). Eini búturinn sem getur verið hægra megin við bút c) er bútur b). Einu bútarnir sem geta verið hægra megin við bút e) eru bútar b) og c). Við ályktum því að bútur c) næst hægra megin við bút e). Þetta sýnir að röð bútanna frá vinstri til hægri er d), a), e), c), b). Það er reikingsdæmið er $12 + 20$ og svar þess er 32.

9. Í Húsdýragarðinum telur Anna kýr og hesta, samtals 12 dýr. Breki telur kýr og grísi, samtals 22 dýr. Díana telur hesta og grísi, samtals 24 dýr. Einar telur kýr, hesta og grísi. Hvaða tölu fær hann?

26 29 34 48

Skýring: Ef við leggjum saman talningar Önnu, Breka og Díönu þá fáum við $12+22+24 = 58$, sem er tvítalning á öllum dýrunum. Því fæst að fjöldi dýranna sem Einar telur er $k + h + g = \dfrac{58}{2} = 29$.

Önnur leið: Einnig má setja fram jöfnur. Ef k er fjöldi kúa, h fjöldi hesta og g fjöldi grísa þá gildir að

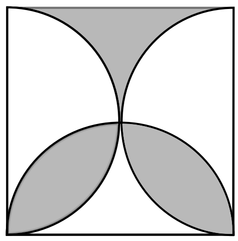
$$k + h = 12$$
$$k + g = 22$$
$$h + g = 24$$

Með því að leggja saman allar jöfnurnar fæst

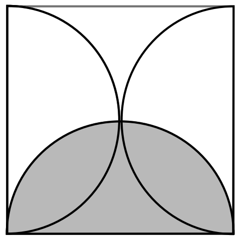
$$2(k + h + g) = (k + h) + (k + g) + (h + g) = 12 + 22 + 24 = 58.$$

Því fæst á að fjöldi dýranna sem Einar telur er helmingur þess, eða 29. Einnig má, út frá jöfnunum að ofan, sýna að það eru 5 kýr, 7 grísir og 17 hestar.

10. Á myndinni er ferningur með hliðarlengd 2. Þrír hálfhringir skerast í miðjum ferningnum. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



$2 - \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad 4 - \pi$ $\qquad 4 - \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad \dfrac{\pi}{2}$



Skýring: Ef við snúum efra skyggða svæðinu um háfhring um miðju ferhyrningsins þá fáum við neðra óskyggða svæðið.Við göngum út frá því að þessi snúningur varðveiti flatarmál. Við gerum líka ráð fyrir því að reikna megi flatarmál skyggað svæðisins með því að leggja sama flatarmál hvers hinna þriggja búta sem það er setta saman úr. Við fáum því að flatarmál skyggða svæðisins er það sama og flatarmál neðri hálfhringskífunnar.
Þar sem hliðarleng ferningsins er 2 þá er það þvermál háflhringskífunnar. Því er geisli hennar 1. Sé gert ráð fyrir að flatarmál hringskífu með geisla r sé $\pi \cdot r^2$ þá fæst að flatarmál hringskífu með geisla 1 er π. Nú er hringskífa sett saman úr tveimur hálfhringskífum. Gerum ráð fyrir að flatarmál hringskífu megi fá með því að leggja sama flatarmál hvorrar hálfhringskífu fyrir sig og að hvor hálfhringskífa hafi sama flatarmál. Því fæst að hálfhringskífa hefur hálft flatamál tilsvarandi hringskífu. Þar með fæst að flatarmál neðri hringskífunnar á myndinni er $\frac{\pi}{2}$. Þar sem það er flatarmál skyggða svæðisins þá fæst að það er $\frac{\pi}{2}$.

Annar hluti

11. Jákvæð heiltala kallast spegiltala ef hana má lesa eins aftur á bak og áfram. Talan 13931 er dæmi um spegiltölu. Finndu næstu spegiltölu á eftir 13931 og leggðu saman alla tölustafi hennar. Hver er útkoman?

8   10   11   14   19

Skýring: Þar sem 13931 er fimm stafa þá eru allar tölur stærri en hún líka að minnsta kosti fimm stafa. Þá er $abc \geq 139$. Ef $abc = 139$ þá væri $abcba = 13931$, svo við ályktum að $abc > 139$. Því er $abc \geq 140$. Nú er 14041 segiltala sem er stærri en 13931 og ljóst er að allar aðrar fimm stafa spegiltölur sem eru stærri en 13931 eru einnig stærri en 14041. Svo er ljóst að sérhver spegiltala sem hefur fleiri en fimm tölustafi er stærri en 14041. Þetta sýnir að 14041 er næsta spegiltala við 13931. Summa tölustafa 14041 er $1 + 4 + 0 + 4 + 1 = 10$.

12. Hver af eftirtöldum tölum er summa af þremur samliggjandi tölum (tölum í röð)?

178 191 225 259 428

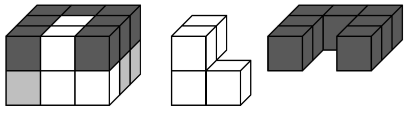
Skýring: Ef n sé sú tala sem er í miðju þriggja samliggjandi talna, þá eru hinar $n - 1$ og $n + 1$ og summa þeirra er $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$. Af þessu sést að til þess að tala sé summa þriggja samliggjandi talna þá þarf hún að vera margfeldi af 3. Öfugt gildir að ef m er margfeldi af 3 þá er $n = \frac{m}{3}$ heiltala og $n - 1, n, n + 1$ eru þrjár samliggjandi tölur með summu $3 \cdot n = m$. Nauðsynlegt og nægjalegt skilyrði fyrir því að tala sé summa af þremur samliggjandi tölum er því að hún sé margfeldi af 3.

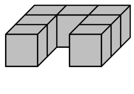
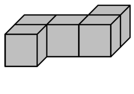
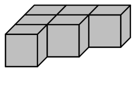
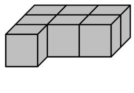
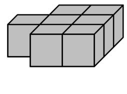
Athugum nú að til að tala sé deilanleg með þremur þá þarf 3 að ganga upp í þversummu tölunnar. Eina talan hér að ofan sem hefur þversummu sem er deilanleg með 3 er talan 225 sem hefur þversummuna 9. Þetta sýnir að 225 er eina talan sem er margfeldi af 3 og þar með eina talan sem rita má sem summu þriggja samliggjandi talna.

Auka: Við nánari athugun má sjá að:

$178 = 3{\cdot}59{+}1, \quad 191 = 3{\cdot}63{+}2, \quad 225 = 3{\cdot}75, \quad 259 = 3{\cdot}86{+}1, \quad 428 = 3{\cdot}142{+}2$

13. Hvaða ljósgrái kubbur var notaður?



A  **B**  **C**  **D**  **E** 

A **B** **C** **D** **E**

Skýring: Samsetti réttstrendingurinn er settur saman út tveimur 3×3 lögum af teningum. Dökkgrái og hvíti kubburinn fylla saman allt efra lagið. Í neðra laginu eru það einungis tveir teningar sem hvíti kubburinn nær að fylla, það eru fremsti miðju teningurinn og fremsti hægri teningurinnn (frá lesanda séð). Því vantar í neðsta lagið alla öftustu röðina, alla miðju röðina og fremsta vinstri teninginn. Þetta svæði svarar til kubbs **D**.

14. Ef $m + 1 = \frac{n-2}{3}$, hvert er þá gildið á $3m - n$?

-1 -5 -3 -9 -7

Skýring: Þar sem $m + 1 = \dfrac{n-2}{3}$ þá er $3m + 3 = n - 2$ og því $3m - n = -2 - 3 = -5$.

15. Hve margar heilar tölur milli 100 og 300 eru margfeldi af bæði 5 og 7, en eru ekki margfeldi af 10?

1 2 3 4 5

Skýring:

Gerum ráð fyrir að n sé heiltala sem er margfeldi af 5 og 7. Þá er n einnig margfeldi af minnsta samfeldi 5 og 7 sem er 35. Sé n því margfeldi af 5 og 7 þá má rita $n = 35t$ þar sem t er heiltala. Gerum ráð fyrir að m sé náttúrleg tala. Sé $0 < n \leq m$ þar sem n er margfeldi af t þá er $0 < 35t \leq m$ svo $0 < t \leq \dfrac{m}{35}$. Þetta sýnir að það eru $\left\lfloor \frac{m}{35} \right\rfloor$ heiltölur n sem eru margfeldi af 5 og 7 þannig að $0 < n \leq m$ (fyrir rautölu x þá er x stærsta heiltalan k þannig að $k \leq x$, x kallast gólffallið af x).

Séu m_1, m_2 heiltölur, $m_1 \leq m_2$ þá er fjöldi heiltalna n sem eru margfeldi af 5 og 7 þannig að $m_1 < n \leq m_2$ sami og fjöldi slíkra heiltanna þannig að $0 < n \leq m_2$ af frádregnum þeim fjölda slíkra heiltanna þannig að $0 < n \leq m_1$ þar sem þeim tölum er ofaukið. Við fáum því að það eru $\left\lfloor \frac{m_2}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m_1}{35} \right\rfloor$ heiltölur n sem eru margfeldi af 35 og $m_1 < n \leq m_2$.

Við fáum því að það eru $\left\lfloor \frac{299}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor = \left\lfloor 8 + \frac{19}{35} \right\rfloor - \left\lfloor 2 + \frac{30}{35} \right\rfloor = 8 - 2 = 6$ tölur á bilinu 100 til 300 sem eru margfeldi af 5 og 7.

Gerum ráð fyrir að n sé heiltala sem er margfeldi af 5, 7 og 10. Þá er n margfeldi af minnsa samfeldi 5, 7 og 10 sem er 70.

Með sama hætti fæst og áður fæst að það er $\left\lfloor \frac{299}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor = \left\lfloor 4 + \frac{19}{70} \right\rfloor - \left\lfloor 1 + \frac{30}{70} \right\rfloor = 4 - 1 = 3$ tölur á milli 100 og 300 sem eru margfeldi af 5, 7 og 10.

Við fáum því að það eru $6 - 3 = 3$ tölur á milli 100 og 300 sem eru margfeldi af 5 og 7 en ekki margfeldi af 10.

Þessar tölur eru $105 = 3 \cdot 35$, $175 = 5 \cdot 35$ og $245 = 7 \cdot 35$.

Þriðji hluti

16. Á hvaða tölustaf endar 2^{2021}, þegar talan er skrifuð í tugakerfi?

Svar: 2

Skýring: Fyrstu veldin af 2 eru $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$. Síðasti tölustafurinn í næsta veldi af 2 ræðst bara af síðasta staf veldisins fyrir ofan, svo mynstrið $2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$ endurtekur sig endalaust. Fjórða hver tala endar þá á 6, svo $2^{2020} = 2^{4\cdot 505}$ hefur síðasta tölustaf 6, svo 2^{2021} endar á 2.

17. Blær ekur 42 km til vinnu. Vegna framkvæmda kemst hán aðeins með hraða 12 km/klst fyrstu 21 km. Hve hratt þarf hán að aka seinni 21 km leiðarinnar til að ná meðalhraða 20 km/klst fyrir alla leiðina?

Svar: 60km/klst.

Skýring: Látum v_1 vera ökuhraða, d_1 vera vegalengd og t_1 vera tímann fyrri hluta leiðarinnar. Látum v_2 ökuhraða, d_2 vera vegalengd og t_2 vera tímann seinni hluta leiðarinnar. Þá er $v_1 = \dfrac{d_1}{t_1}$ og $v_2 = \dfrac{d_2}{t_2}$. Jafngilt er $t_1 = \dfrac{d_1}{v_1}$ og $t_2 = \dfrac{d_2}{v_2}$.

Látum v vera meðalhraða alla leiðina, $d = d_1 + d_2$ vera heildarvegalengdina og $t = t_1 + t_2$ vera heildartímann. Þá er $v = \dfrac{d}{t}$. Setjum inn fyrir d og t og fáum:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\frac{d}{t}} = \frac{t}{d} = \frac{t_1 + t_2}{d_1 + d_2} = \frac{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}}{d_1 + d_2} = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_1} + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_2}$$

Því fæst:

$$\frac{d_2}{d_1 + d_2} \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v} - \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{1}{v_1}$$

og þar með:

$$v_2 = \frac{1}{\frac{d_1 + d_2}{d_2} \cdot \frac{1}{v} - \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{v_1}} = \frac{d_2 \cdot v \cdot v_1}{(d_1 + d_2) \cdot v_1 - d_1 \cdot v}$$

Gefið er að $d_1 = 21$km, $d_2 = 21$km, $v_1 = 12$km/klst. og $v = 20$km/klst. svo við fáum að meðalhraði Blær seinni hluta leiðarinnar, það er v_2 er:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{21\text{km} \cdot 20\text{km/klst.} \cdot 12\text{km/klst.}}{(21\text{km} + 21\text{km}) \cdot 12\text{km/klst.} - 21\text{km} \cdot 20\text{km/klst.}} \\ &= \frac{5040\text{km}^3/\text{klst}^2}{84\text{km}^2/\text{klst.}} \\ &= 60\text{km/klst.} \end{aligned}$$

18. Hver er stærsta frumtalan sem gengur upp í $4^{11} - 2^{12}$?

Svar: 31.

Skýring: Nú fæst:

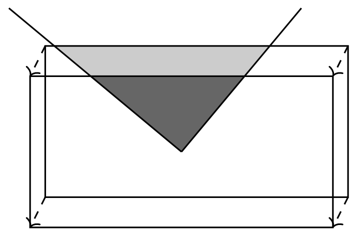
$$\begin{aligned}
4^{11} - 2^{12} &= (2^2)^{11} - 2^{12} \\
&= 2^{2\cdot 11} - 2^{12} \\
&= 2^{12+10} - 2^{12} \\
&= 2^{12} \cdot 2^{10} - 2^{12} \\
&= 2^{12} \cdot (2^{10} - 1) \\
&= 2^{12} \cdot (2^{5\cdot 2} - 1) \\
&= 2^{12} \cdot ((2^5)^2 - 1^2) \\
&= 2^{12} \cdot (2^5 + 1) \cdot (2^5 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot (2 + 1) \cdot (2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0) \cdot 2^5 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot 3 \cdot (16 - 8 + 4 - 2 + 1) \cdot (32 - 1) \\
&= 2^{12} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31
\end{aligned}$$

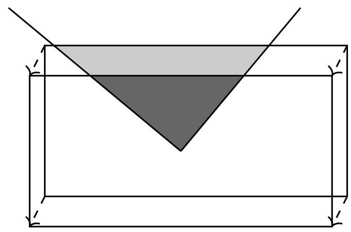
Nú eru allar tölurnar 2, 3, 11 og 31 óþáttanlegar í heiltölunum (ef þær væru þáttanlegar þá mætti skrifa þær sem margfeldi náttúrlegra talna sem eru minni en þær en einföld prófun sýnir að svo sé ekki). Þar sem óþáttanlegar heiltölur eru frumtölur þá eru 2, 3, 11 og 31 allt frumtölur. Af grundvallarsetningu reikningslistarinnar leiðir að frumþáttun sérhverra náttúrlegra tölur er ótvíræð. Við ályktum að 2, 3, 11 og 31 séu einu frumtölurnar sem ganga upp í $4^{11} - 2^{12}$ og 31 er þeirra stærst.

19. Edda á snjallsíma sem er rétthyrndur með hlutfall lengdar og breiddar 2 : 1. Á horni rétthyrnds borðs vegur sími Eddu salt og er næstum dottinn fram af. Hversu stór hluti bakhliðar símans getur staðið fram af borðinu í mesta lagi án þess að hann detti? Síminn dettur ef miðja hans er utan borðflatarins.

Svar: $\frac{7}{8}$.

Skýring: Gerum ráð fyrir að miðja símans liggi ekki á horninu. Þá má hliðra símanum þannig að miðja símans liggi á horninu. Með þessu þá eykst sá hluti símans sem liggur ekki á borðinu. Við megum því gera ráð fyrir að miðja símans liggi á jaðri borðsins.



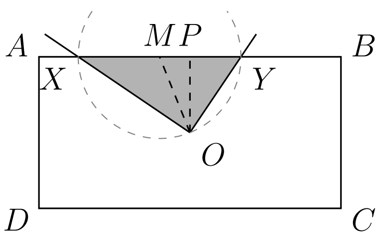


Látum $ABCD$ vera rétthyrninginn sem bakhlið símans er þannig að $[A,B]$ sé lengdin og $[B,C]$ sé breiddin. Látum x vera breidd símans. Þá er lengdin $2x$. Látum O vera miðju $ABCD$ (skurðpunkt hornanlínanna). Þar sem $[A,B]$ er lengra en $[B,C]$ þá er] AOB stærra en horn] BOC. Þar sem þau eru grannhorn þá er] AOB gleitt en] BOC hvasst.

Gerum ráð fyrir að ℓ og m séu borðbrúnirnar. Ef ℓ sker aðra af hliðunum $[A,D]$ og $[B,C]$ þá sker m aðra af hliðunum $[A,B]$ og $[C,D]$. Í báðum tilvikum þá sker borðbrún lengri hlið símans.

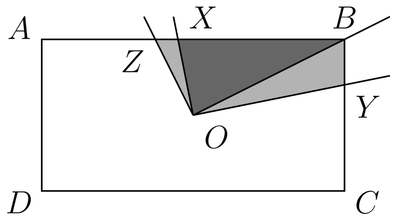
Vegna samhverfni þá má gera ráð fyrir að ℓ skeri $[A,B]$ í X og m fáist af ℓ með snúningi um rétt horn um snúningsstefnuna ABC. Þá getur þrennt gerst:

(a) Gerum ráð fyrir að m skeri $[A,B]$ í Y. Látum M vera miðpunkt $[X,Y]$. Þar sem] XOY er rétt þá er $[M,X] = [M,O] = [M,Y]$. Hæð XOY á hliðina $[X,Y]$ er $\frac{x}{2}$ og $[X,Y]$ er grunnlína hans. Því er fæst að flatarmál XOY er $\frac{\frac{x}{2}\cdot\ [X,Y]}{2} = \frac{x\cdot\ [M,O]}{2}$. Þetta er því lámarkað þegar $[M,O]$ er lámarkað en það gerist þegar M er fótpunktur lóðlínunnar frá O á A,B . Þá er $[M,O] = \frac{x}{2}$. Þar sem innsvæði XOY er sá hluti símans sem liggur innan á borðinu þá fæst að að minnsta kosti $\frac{x\cdot\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4} = \frac{2x\cdot x}{8}$ svæði af bakhlið símans liggur á borðinu, það er $\frac{1}{8}$ af bakhlið símans. Það þýðir að í mesta lagi $\frac{7}{8}$ hluti símans liggur utan borðsins í þessu tilviki.

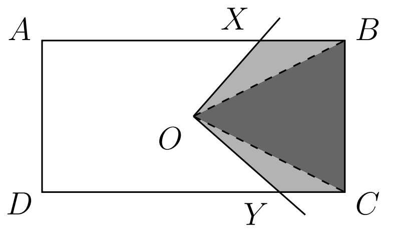


(b) Gerum ráð fyrir að m skeri $[B,C]$. Látum n vera lóðlínu O,B um O og látum Z vera skurðpunkt $[A,B]$ við n. Þá fæst auðveldlega að ZXO og

BYO eru einslaga í hlutföllunum $\frac{1}{2}$. Sér í lagi þá er flatarmál ZXO er minna er flatarmál BYO. Því fæst að flatarmál $XBYO$ er stærra eða jafnt og flatarmál ZBO sem aftur er stærra en $\frac{1}{8}$ af flatarmáli $ABCD$. Þar af leiðir að í þessu tilviki þá er minna en $\frac{7}{8}$ hluti bakhliðar símans utan borðsins.



(c) Gerum ráð fyrir að m skeri $[C, D]$ í Y. Þá liggur BCO innan á borðinu og flatarmál hans er $\frac{1}{4}$ af flatarmáli bakhliðar símans svo það liggur að minnsta kosti $\frac{1}{4}$ hluti bakhliðar símans á borðinu. Því liggur í mesta lagi $\frac{3}{4}$ hluta símans utan borðsins í þessu tilviki.



Við sjáum því að í mesta lagi $\frac{7}{8}$ hluti símans stendur fram af borðinu.

20. Sjö tölustafa heiltala sem inniheldur ekkert núll kallast ***minnisstæð*** ef fyrstu þrír tölustafir hennar endurtaka sig í nákvæmlega sömu röð annars staðar í tölunni. Til dæmis eru 1111111, 1231234 og 9642964 allt dæmi um minnisstæðar tölur. Finnið fjölda minnisstæðra sjö tölustafa talna.

Svar: 25353

Skýring: Skiptum í tilvik:

(a) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aaa.

i. Ef fjórða talan er líka a þá er talan minnistæð hverjar svo sem næstu þrjár tölurnar eru. Það má velja a á 9 vegu og hverja hinna þriggja talnanna á 9 vegu hverja. Það eru því $9^4 = 6561$ minnisstæðar tölur á þessu formi.

ii. Gerum ráð fyrir að fjórða talan b sé frábrugðin a. Þá er talan minnisstæð ef og aðeins ef síðust þrjár tölurnar eru allar a. Það má velja a á 9 vegu og þar sem b er frá brugðin a þá má velja b á $9 - 1 = 8$ vegu. Það má því velja minnistæða tölu á þessu formi á $9 \cdot 8 = 72$ vegu.

Það eru því $6561 + 72 = 6633$ minnistæðar tölur sem byrja á aaa.

(b) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aab þar sem a og b eru ólíkar.

Þá getur aab komið fyrir í fjórðu til sjöttu eða fimmtu til sjöundu tölu. Það getur ekki bæði gerst því þá væri sjötta talan bæði a og b. Í hvoru tilviki er frjálst val fyrir þá tölu sem eftir er. Það má velja a og b á $9 \cdot 8 = 72$ vegu og síðan má velja síðustu töluna á 9 vegu. Það eru tvö svona tilvik svo við fáum að það eru $2 \cdot 72 \cdot 9 = 1296$ minnistæðar tölur sem byrja á aab.

(c) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu abb. Rétt eins og í síðasta tilviki þá fæst að það eru $2 \cdot 72 \cdot 9 = 1296$ minnisstæðar tölur sem byrja á abb.

(d) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu aba þar sem a og b eru ólíkar tölur.

  i. Séu fyrstu þrjár tölurnar eins og þriðja til fimmta talan þá er talan minnistæð hverjar sem síðustu tvær tölurnar eru. Það má velja a og b á $9 \cdot 8 = 72$ vegu og síðust tvær tölurnar á 9 vegu hvora það eru því $72 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ minnistæðar tölur í þessu tilviki.

  ii. Séu fyrstu þjár tölurnar eins og fjórða til sjötta talan þá eru fyrstu þrjár tölurnar ekki eins og þriðja til fimmta talan því fjórða talan er a. Það má þá velja síðustu töluna á 9 vegu. Það þýðir að það eru því $9 \cdot 8 \cdot 9 = 648$ minnistæðar tölur í þessu tilviki.

  iii. Séu fyrstu þrjár tölurnar eins og fimmta til sjöunda talan þá má velja fjórðu töluna frjálst á 9 vegu. Í einu af þessu tilviki þá veljum við fjórðu töluna sem b og lendum því í tilvikinu $ababa$ að ofan en það hefur þegar verið talið. Við megum því velja fjórðu töluna á $9 - 1 = 8$ vegu til þess að forðast tvítalningu. Þetta tilvik gefur því $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ nýjar minnistæðar tölur.

Við sjáum því að það eru $5832 + 648 + 576 = 7056$ minnisstæðar tölur sem byrja á aba.

(e) Gerum ráð fyrir að rita megi fyrstu þrjár tölurnar á forminu abc þar sem a, b og c eru ólíkar. Sé talan minnistæð þá eru fyrstu þrjár tölurnar eins og fjórða til sjötta talan eða fimmta til sjöunda en ekki bæði þar sem annars væri fimmta talan bæði a og b. Í báðum tilvikum er ein tala eftir sem má velja frjálst á 9 vegu. Velja má a, b og c ólíkar á $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ vegu. Það eru svo tvær leiðir til þess að samsvara fyrstu þrjár tölurnar við einhverjar aðrar þrjár tölur og síðan má velja síðustu tölurnar á 9 vegu. Það eru því $2 \cdot 504 \cdot 9 = 9072$ minnistæðar tölur á þessu formi.

Lesandi getur gengið úr skugga um að þetta eru öll tilvik sem komið geta upp. Við fáum því að það eru $6633 + 1296 + 1296 + 7056 + 9072 = 25353$ minnisstæðar tölur.

Fjórði hluti

21. Verslun selur epli í lokuðum pokum með 5, 8 eða 12 eplum. Ekki má opna poka til að breyta fjöldanum í pokanum. Hver er mesti fjöldi epla sem ekki er mögulegt að kaupa?

Lausn: Gerum ráð fyrir að n sé fjöldi epla sem við vilju kaupa. Vissulega má kaupa $n = 0$ epli með því að kaupa ekkert. Gerum ráð fyrir að $n > 0$. Þá má kaupa n epli ef og aðeins kaupa megi $n - 5$, $n - 8$ eða $n - 12$ epli þar sem að ef $n > 0$ þá þarf að kaupa einhvern poka og ef við teljum þann poka frá þá getum við keypt hin eplin með hinum pokunum. Rekjum okkur því upp með því að merkja o ef við getum keypt tiltekinn fjölda og x ef svo er ekki:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
o	x	x	x	x	o	x	x	o	x	o	x	o	o	x	o	o	o	o	x	o	o	o	o	o

Við sjáum því að við getum ekki keypt 19 epli en við getum keypt 20, 21, 22, 23 og 24 epli. Ef við viljum kaupa fleiri en 24 epli þá getum við keypt 5 epla poka þangað til við eigum eftir að kaupa 24 eða færri epli. Rétt áður en við keyptum 5 epla pokan sem kom afgangnum niður fyrir 25 þá vorum við með 25 eða fleiri epli sem við áttum eftir að kaupa. Þegar við höfum keypt þenna 5 epla poka þá eigum við því eftir að kaupa að minnsta kosti 20 epli. Það er við getum keypt 5 epla poka þanngað til við eigum eftir að kaupa 20, 21, 22, 23 eða 24 epli en við vitum að við getum keypt þessa fjölda af eplum. Við sjáum því að ef við getum keypt hvaða fjölda sem er stærri en 19. Stærsti fjöldi sem ekki má kaupa er því 19.

22. Á hve marga vegu má raða níu ásum inn í venjulegt Sudoku?
Engir tveir ásar mega vera í sama dálki eða sömu línu, né í sama 3×3 ferningi með þykkri rönd. Dæmi um leyfilega uppröðun má sjá til hægri.

			1					
1								
								1
	1							
				1				
							1	
					1			
		1						
						1		

Lausn 1:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Við númerum 3×3 reitina frá 1 upp í 9 eins og á mynd til hægri. Setja má ás í fyrsta reitinn á 9 vegu. Sá ás útilokar eina línu í reit tvö og einn dálk í reit fjögur, í þeim reitum má velja ás á 6 vegu. Í reit fimm er þá búið að útiloka eina línu og einn dálk, sem skarast í einum reit, svo 4 reitir eru eftir sem koma til greina.
Í reitum þrjú og sex er búið að útiloka tvær línur, og því þrír möguleikar eftir í hvorum fyrir sig. Í reitum 7 og 8 er búið að útiloka tvo dálka, og því einnig 3 möguleikar í þessum reitum. í reit 9 er búið að útiloka tvær línur og tvo dálka, svo þar er aðeins 1 möguleiki.

Heildarfjöldi leiða til þess að fylla inn ásana er þá $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 46656$.

Athugasemd: Í svona dæmum eru gefin full stig fyrir rétta tölu, t.d. $9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$ án þess að margfeldið sé reiknað út.

Lausn 2:

Ef settir eru ásar inn á borðið á leyfilegan máta, þá má merkja t.d. dálka 1-3 eftir því í hvaða 3×3 reit er ás í þeim dálki. T.d. ef ásinn í fyrsta dálknum er í miðreitnum þá merkjum við hann með 2, ef ásinn í næsta dálki er í neðsta reitnum merkjum við hann með 3 og ef ásinn í þriðja dálkinum er í efsta reitnum merkjum við hann með 1, eins og á mynd. Eins gerum við fyrir dálka 4-6 og 7-9, og svo eins fyrir línurnar.

	2	3	1	2	3	1	2	1	3
1			1						
2						1			
3								1	
1	1								
2				1					
3							1		
2					1				
1		1							
3									1

Öfugt, þá ef gefnar eru svona raðanir á þrenndum dálka og lína, þá getum við skrifað ásana inn út frá því á nákvæmlega einn hátt. Svo fjöldi leiða til þess að raða inn ásunum er $(3!)^6 = 6^6 = 46656$.