Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Aðgerðirnar $\clubsuit$ og $\spadesuit$ eru skilgreindar svona: $a \clubsuit b = a^2 - b^2$ og $a \spadesuit b = 4ab$. Hvert er þá gildið á $5 \spadesuit (3 \clubsuit 2)$?

☐ -551 ☐ -100 ☒ 100 ☐ 200

Skýring: Fáum $4 \cdot (3^2 - 2^2) \cdot 5 = 100$

2. Í þríhyrningi ABC er búið að teikna miðlínuna AM. Gefið er að $AM = MB$ og $\angle ABC = 40°$. Hversu stórt er þá hornið $\angle ACB$?

☐ $30°$ ☐ $40°$ ☒ $50°$ ☐ $80°$

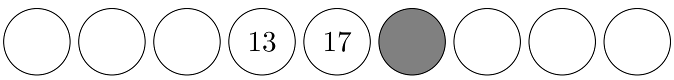
Skýring: Þar sem $AM = MB$ eru þríhyrningarnir AMC og AMB jafnarma. Nú er $\angle ABM = \angle ABC = 40°$ og því er topphornið $180° - 40° - 40° = 100°$. Þá fæst að topphorn þríhyrningsins AMC er $80°$ þar sem topphornin tvö eru grannhorn. Þá má álykta að $\angle ACB = \angle ACM = 50°$.

3. Thelma slær 2^k inn í vasareikni. Hún ýtir síðan alls n sinnum á $\sqrt{}$ takkann eða þar til vasareiknirinn sýnir töluna 2. Hvert er gildið á k?

☐ n ☐ $2n$ ☒ 2^n ☐ n^n

Skýring: Í hvert sinn sem Thelma ýtir á $\sqrt{}$ þá er hún í raun að hefja í veldið $1/2$ sem svarar til margföldunar með $1/2$ í veldisvísi. Að ýta n sinnum á $\sqrt{}$ jafngildir því að margfalda n sinnum með $1/2$ í veldisvísi; að margfalda með $1/2^n$ í veldisvísi. Því er $k \cdot (1/2^n) = 1$ svo $k = 2^n$.

4. Tölurnar 1, 5, 6, 7, 13, 14, 17, 22 og 26 eru ritaðar í hringi sem standa í röð. Gunnar reiknar út meðaltal talnanna í fyrstu þremur hringjunum, meðaltal talnanna í miðjuhringjunum þremur og meðaltal talnanna í síðustu þremur hringjunum. Þessi þrjú meðaltöl reynast vera jöfn. Ef tölunum 13 og 17 er komið fyrir eins og sést á myndinni, hvaða tala á þá að vera í skyggða hringnum?



☐ 1 ☐ 5 ☒ 7 ☐ 14

Skýring: Sé deilt í summu allra talnanna með 3 þá fæst 37 og því vantar 7 í dökka hringinn.

5. Látum $M(n)$ og $S(n)$ tákna margfeldi og summu tölustafa heiltölunnar n. Til dæmis er $M(23) = 6$ og $S(23) = 5$. Hvaða tala er í einingarsæti tveggja stafa heiltölunnar k ef $k = M(k) + S(k)$?

☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☒ 9

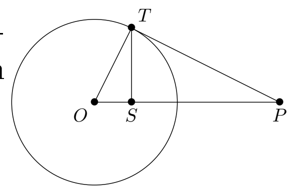
Skýring: Táknum töluna $k = 10a + b$ þar sem a er tugasætistölustafur og b einingarsætistölustafur. Fáum þá jöfnuna $ab + a + b = k = 10a + b$ sem gefur $ab + a + b = 10a + b$ og þá $9a = ab$ svo $b = 9$.

6. Bolli bjalla byrjaði á hægri endanum og er búinn að trítla $\frac{3}{4}$ af stönginni. Mæja maur byrjaði á vinstri endanum og er búin að trítla $\frac{2}{3}$ af stönginni. Hversu stór hluti stangarinnar skilur á milli Bolla og Mæju?

☐ $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{5}{7}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ $\frac{5}{12}$

Skýring: Bilið milli þeirra er $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-4-3}{12} = \frac{5}{12}$.

7. Hringur hefur miðju O. Strikið PT liggur á snertli við hringinn í T. Strikið TS er hornrétt á OP. Hver er lengd TS í cm ef $OS = 6$ cm og $SP = 24$ cm ?



☒ 12 ☐ $12\sqrt{5}$ ☐ 15 ☐ $6\sqrt{3}$

Skýring: Þríhyrningarnir OTS og TPS eru einslaga. Fáum þá hlutföll milli hliða: $\frac{TS}{6} = \frac{24}{TS}$ og út frá því fæst að $TS = 12$.

8. Sívalningslaga gosdós er gerð úr ferningslaga málmplötu og tveimur hringskífum sem báðar hafa þvermálið k. Hvert er rúmmál dósarinnar?

☐ $k^3\pi$ ☐ $\dfrac{k^3\pi}{2}$ ☒ $\dfrac{k^3\pi^2}{4}$ ☐ $k^3\pi^2$

Skýring: Geisli hringskífanna er $r = \frac{k}{2}$ og hliðarlengd ferningsins er jöfn ummáli hringsins, þ.e. $k\pi$. Fáum þá að rúmmálið er $k\pi \cdot (\frac{k}{2})^2\pi = \frac{k^3\pi^2}{4}$.

9. Símon ætlar að saga spýtu í níu jafnlanga búta. Hann mælir og merkir en hefur ekki tíma til að saga. Anna tekur spýtuna, sér ekki merkin hans Símonar og merkir til að saga í átta jafnlanga búta. Hún hefur ekki heldur tíma til að saga. Jónatan kemur og sagar spýtuna á öllum merktum stöðum. Hversu marga búta fær Jónatan?

☐ 15 ☒ 16 ☐ 17 ☐ 18

Skýring: Símon merkir spýtuna á 8 stöðum og Anna á 7 stöðum. Ekkert merkja hennar Önnu fellur í merki frá Símoni svo til samans eru 15 merki á spýtunni sem Jónatan sagar eftir og fær 16 búta.

10. Um tvær rauntölur a og b, sem hvorug er núll, gildir að $ab = a - b$. Hvert er gildi stærðarinnar $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$?

☐ -2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 2

Skýring: Þar sem $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} = \dfrac{(a-b)^2 + 2ab}{ab}$ og $a - b = ab$ þá fæst:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{(ab)^2 + 2ab}{ab} - ab = ab + 2 - ab = 2$$

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Hver er fjöldi heiltalna n þannig að $\frac{1}{7} \leq \frac{6}{n} \leq \frac{1}{4}$.

Svar: 19

Skýring: Fáum út frá fyrri hluta ójöfnunnar að $n \leq 42$ og út frá seinni hluta ójöfnunnar að $n \geq 24$ og þarna á milli eru alls 19 heiltölur.

12. Fimm línur, sem allar liggja samsíða einni hlið þríhyrnings, skipta hinum tveimur hliðum þríhyrningsins upp í 6 jafnstór bil og þríhyrningnum sjálfum í 6 svæði. Hvert er flatarmál þríhyrningsins ef flatarmál stærsta svæðisins er 33 flatareiningar?

Svar: 108

Skýring: Allir þríhyrningarnir sem línurnar mynda eru einslaga. Köllum hæð og grunnlínu í stærsta þríhyrningnum h og g. Þá eru hæð og grunnlína næststærsta þrhyrningsins $\frac{5}{6}h$ og $\frac{5}{6}g$. Fáum að $33 = hg - \frac{25}{36}hg$ sem efur $33 = \frac{11}{36}hg$ og þá $hg = 108$.

13. Talnarunan 2,3,6,8,8,... er útbúin með því að skrá fyrst 2 og 3 og síðan einingartölu margfeldis talnanna tveggja á undan. Hver er tala númer 2017 í þessari talnarunu?

Svar: 2

Skýring: Talnarunan er $2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, \ldots$ þar sem lota með sex tölustöfum $8, 8, 4, 2, 8, 6$ endurtekur sig ítrekað eftir fyrstu þrjá stafina. Höfum að $2017 - 3 = 2014$ og $4 \equiv 2014 \mod 6$ og fjórða talan í lotunni er 2.

14. Hversu stór hluti borðdúksins á myndinni er svartur?

Svar: 32%

Skýring: Ef við lítum á hornalínu hvers litlu gráu ferninganna sem eina einingu þá fæst að dúkurinn er $5 \cdot 5 = 25$ flatareiningar í heild og grái hlutinn í miðjunni er $3 \cdot 3 = 9$ flatareiningar þannig að röndin í kring er $25 - 9 = 16$ flatareiningar og helmingur hennar er grár svo í heild er $\frac{8}{25}$ dúksins svartlitaður.

15. Hversu mörg pör heiltalna (x, y) uppfylla jöfnuna $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$?

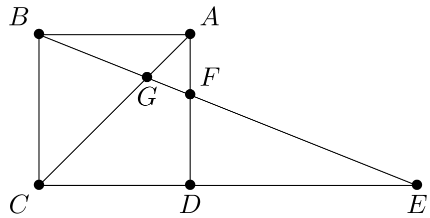
Svar:

Skýring: Það er ljóst að tölurnar x og y geta ekki báðar verið stærri en 8 og ekki báðar neikvæðar. Vegna samhverfu er ljóst að ef (a, b) er lausn þá er (b, a) einnig lausn og vagna samhverfu má gera ráð fyrir að $x \leq 8$. Jöfnuna má rita $y = \dfrac{4x}{x-4}$. Þá nægir að prufa gildi $x \in 1, 2, 3, \ldots, 8$ og alls fást 9 lausnir (8,8), (6,12)(12,6),(5,20)(20,5),(3,-12)(-12,3),(2,-4)(-4,2).

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Ferningur $ABCD$ er þannig að hornpunkturinn D liggur á strikinu CE, strikið BE sker strikið AC í punktinum G og strikið AD í punktinum F. Hver er lengd striksins EF ef vitað er að $BG = 3$ m og $GF = 1$ m?



Myndin er **ekki** í réttum hlutföllum

Lausn: Sjáum að þríhyrningarnir BEC, FED og FBA eru einslaga af því að þeir eru allir rétthyrndir og annars vegar eru strikin BC og FD samsíða og hins vegar þá eru hornin $\angle BFA$ og $\angle DFE$ topphorn.

Einnig fæst að GCB og GAF eru einslaga af því að hornin $\angle CBG$ og $\angle AFG$ eru eins og hornin $\angle BCG$ og $\angle GAF$ eru bæði 45°.

Hlutföll milli hliða í GCB og GAF gefa að $\frac{1}{3} = \frac{AF}{BC}$ svo $BC = 3AF$. Vitum að $AF + FD = BC$ svo $AF + FD = 3AF$ og þá $FD = 2AF$.

Hlutföll milli hliða í FED og BEC gefa $\frac{x}{x+4} = \frac{2AF}{3AF}$ svo $3x = 2(x + 4)$ og þá $x = 8$.

17. Ferningstala er tala sem er annað veldi heillar tölu. Töluna a má rita sem summu tveggja ólíkra ferningstalna. Sýnið að þá megi einnig rita töluna $2a$ sem summu tveggja ólíkra ferningstalna.

Lausn: Rita má töluna a sem summu tveggja ólíkra ferningstalna svo $a = x^2 + y^2$. Við megum gera ráð fyrir að $x > y > 0$. Þá er líka $x + y > x - y > 0$ og einnig gildir $(x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2(x^2 + y^2) = 2a$. Þar með er hægt að skrifa $2a$ sem summu tveggja ólíkra ferningstalna.

18. Finnið allar margliður $P(x)$ með heiltölustuðla sem eru ekki neikvæðir þannig að $P(2) = 20$ og $P(3) = 30$.

Lausn: (Elvar Wang Atlason) Athugum að þar sem $p(3) = 3 < 81 = 1 \cdot 3^4$ er stig (P) minna en 4. Þá er $(P) > 0$ því P er ekki fast. Skiptum í tilvik.

i) Ef stig $(P) = 1$ má rita $P(x) = hx + k$ og þá er $P(2) = 20 \Leftrightarrow 2h + k = 20$ og $P(3) = 30 \Leftrightarrow 3h + k = 30$. Við leysum saman þessar jöfnur og fáum $h = 10$ og $k = 0$.

ii) Ef stig $(P) = 2$ má rita $P(x) = ax^2 + bx + c$ og þá er $P(2) = 20 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 20$ og $P(3) = 30 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 30$ það er $5a + b = 10$. Nú er $a \neq 0$ því að $(P) = 2$. Ef $a = 1$ er $b = 5$ og $c = 30 - 9 - 15 = 6$ sem gefur lausn. Ef $a = 2$ er $b = 0$ og $c = 30 - 9 \cdot 2 = 12$ sem gefur lausn. Nú er $a < 3$ því b er ekki neikvætt.

iii) Ef stig $(P) = 3$ má rita $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ og $P(2) = 20 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 20$ og $P(3) = 30 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 30$. Þá er $19a_3 + 5a_2 + a_1 = 10$ sem er í mótsögn við að $a_3 \neq 0$ svo engin lausn er í því tilviki.

Allar lausnir eru því $P(x) = 10x$, $P(x) = x^2 + 5x + 6$ og $P(x) = 2x^2 + 12$.

19. Rauðhetta á heima í punkti $(0, 0)$ í venjulegu hnitakerfi. Hún ætlar að fara til ömmu sinnar sem býr í punktinum $(4, 4)$. Rauðhetta getur í hverju skrefi farið annað hvort upp í næsta heiltöluhnit eða til hægri í næsta heiltöluhnit. Stóri vondi úlfurinn vill verða á vegi Rauðhettu. Hann má velja sér hvaða punkt með heiltöluhnit sem er á milli heimilis Rauðhettu og heimilis ömmunnar. Hvar á úlfurinn að bíða þannig að hann verði á vegi Rauðhettu á sem flestum af leiðunum sem hún getur valið?

Lausn: Tökum eftir að fjöldi leiða til að komast úr punktinum $(0, 0)$ í punktinn (n, m) er $\binom{n+m}{n}$ sem sést af því að hver leið saman stendur af $n + m$ skrefum og nákvæmlega n eru til hægri og m eru upp. Hver leið ákvarðast því einvörðungu af því hvar í röðinni hægri skrefin eru. Það eru $\binom{n+m}{n}$ leiðir til að velja n stök úr $n + m$ staka mengi. Ef úlfurinn velur punktinn (i, j) til að bíða þá liggja $\binom{i+j}{i} \cdot \binom{8-(i+j)}{4-i}$ leiðir í gegnum. Hver leið saman stendur af tveimur leggjum öðrum frá $(0, 0)$ í (i, j) það eru $\binom{i+j}{i}$ slíkir og hinum frá (i, j) í $(4, 4)$ og það eru $\binom{8-(i+j)}{4-i}$ slíkir. Fjöldi leiða er samhverf um um línuna $y = x$ og einnig um línuna $y = 4 - x$ svo þar með nægir að skoða punktana $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ og $(2, 2)$ fjöldi leiða fyrir þá er $35, 15, 5, 1, 40, 30, 16$ og 36. Best er því fyrir úlfinn að velja einhvern punktanna $(0, 1), (1, 0), (3, 4)$ eða $(4, 3)$ til að hámarka fjölda leiða sem fara í gegnum punktinn sem hann velur sér.