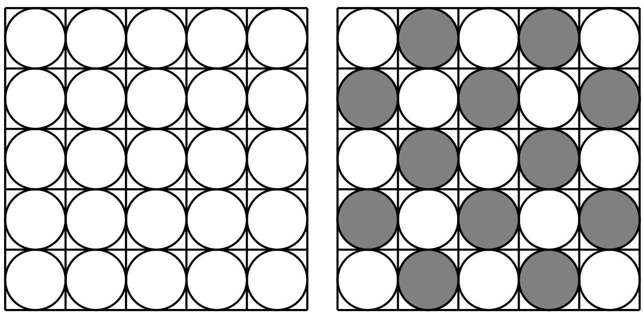
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

# Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2016–2017

## Svör og lausnir

## Efra stig



Byrjun Endir

## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

**1.** Nonni raðar málningardósum í hillu með 16 tómum hólfum þannig að jafnmargar dósir fara í hvert hólf. Yfirmaður byggingarvörudeildar biður Nonna að taka dósirnar úr fjórum hólfanna og dreifa þeim jafnt á hin hólfin. Við það fær hvert hólf 5 dósir til viðbótar. Hversu margar dósir eru í hillunni?

☐ 80 ☐ 128 ☐ 180 ☒ 240

**Skýring:** Fáum að ef $x$ er fjöldi dósa í hverju hólfi í byrjun þá fæst að $16x = 12(x+5)$ sem gefur að $x = 15$ og þá fjöldi dósanna $16 \cdot 15 = (10+6)(10+5) = 100 + 60 + 50 + 30 = 240$.

**2.** Hvert er flatarmál fernings, mælt í fersentímetrum, ef hornalínan hefur lengdina $x + y$ cm?

☐ $(x+y)^2$ ☐ $x^2 + y^2$ ☒ $\frac{1}{2}(x+y)^2$ ☐ $2x + 2y$

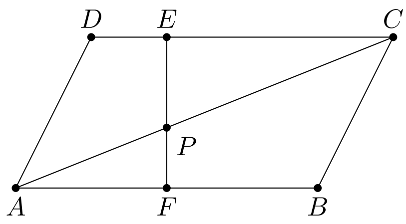
**Skýring:** Ferningurinn hefur hliðarlengd $a$ og þá fæst með reglu Pýþagórasar að $a^2+a^2 = (x+y)^2$ en flatarmál ferningsins er $a^2$ svo hér fæst að $a^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2$.

**3.** Í bæ nokkrum búa hrappar sem alltaf ljúga og heiðursmenn sem alltaf segja satt. Bæjarbúar vita vel hver tilheyrir hvorum hópnum en sama máli gegnir ekki um aðkomumenn. Jónatan var nýkominn til bæjarins og hitti á bæjartorginu sjö manns sem sátu við hringborð. Jónatan spurði hvort hrappar sætu við borðið og gall þá í einum „Ég sit milli tveggja hrappa!“. Í kjölfarið sagði hver hinna sem við borðið sátu „Ég sit líka milli tveggja hrappa!“ Hversu margir hrappar sátu við borðið?

☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ Ekki hægt að segja til um það

**Skýring:** Upphrópun sjömenninganna gefur að þar sem hrappar ljúga alltaf þá geta ekki allir við borðið verið hrappar og ekki heldur allir verið heiðursmenn. Heiðursmenn verða að hafa hrapp á hvora hönd (enda segja þeir alltaf satt) og hrappar verða að hafa a.m.k. einn heiðursmann sér við hlið. Setjum heiðursmann við borðið og þá hrappa sinn á hvora hönd hans. Við getum ekki sett annan hrapp við hlið þeirra beggja þar sem einungis tvö sæti væru þá eftir og aldrei mega þrír hrappar sitja saman í röð (þá væri miðju-hrappurinn að segja satt en hrappar ljúga alltaf) eða tveir heiðursmenn sitja saman. Sama hvort við setjum tvo heiðursmenn eða einn heiðursmann og einn hrapp við hlið hrappanna sem fyrir eru þá fáum við sama mynstur með fjórum hröppum og þremur heiðursmönnum.

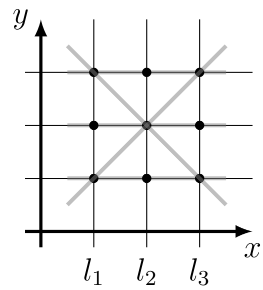
**4.** Í samsíðungi $ABCD$ er $DE : EC = 1 : 3$. $F$ er miðpunktur $AB$ og $EF$ sker $AC$ í punkti $P$. Hvert er hlutfallið $AP : PC$?




☐ 1 : 3 ☒ 2 : 3 ☐ 2 : 5 ☐ 3 : 4

**Skýring:** Nú er $EC = \frac{3}{4}DC$ og $AF = \frac{1}{2}AB$ og $AB = DC$. Notum einslaga þríhyrningana $\triangle PEC \sim \triangle PFA$ og fáum hlutföll $\frac{AP}{PC} = \frac{AF}{EC} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{3}{4}DC} = \frac{2}{3}$.

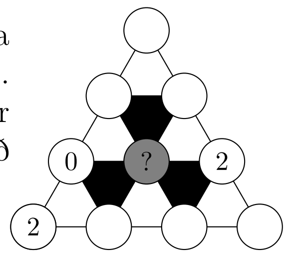
**5.** Hversu margir fleygbogar $y = ax^2 + bx + c$, með $a \neq 0$, fara í gegnum minnst þrjá af punktunum níu á myndinni?




☐ 8 ☐ 12 ☐ 20 ☒ 22

**Skýring:** Fleygboginn sem jafnan lýsir inniheldur í mesta lagi einn punkt á hverri línanna $l_1$, $l_2$ og $l_3$. Þar sem fleygboginn á að fara í gegnum þrjá punkta þá þarf að velja einn punkt á hverri línanna. Allt í allt má velja slíka þrennd punkta á $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ vegu, en 5 möguleikanna gefa punkta sem liggja á beinni línu (þrjár láréttar og tvær skásettar) og því ekki á fleygboga. Heildarfjöldi fleygboganna er því $27 - 5 = 22$.

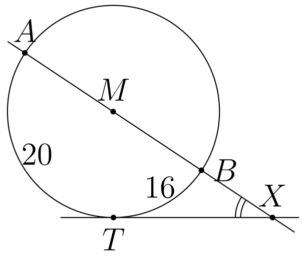
**6.** Rita skal tölurnar 0,1 eða 2 í hvern þessara hringa. Summa hverra þriggja hornpunkta hvítra þríhyrninga skal vera deilanleg með 3. Summa hverra þriggja hornpunkta svartra þríhyrninga á hins vegar ekki að vera deilanleg með þremur. Hvaða tala eða tölur geta passað í hringinn í miðjunni?




☒ bara 0 ☐ bara 1 ☐ bara 2 ☐ 0 eða 1

**Skýring:** Til þess að hvíti þríhyrningurinn neðst til vinstri fái summu hornpunkta sem deilanleg er með 3 þá þarf að velja 1 í auða reitinn til hægri við tvistinn. Til þess að svarti þríhyrningurinn hafi hornasummu sem ekki er deilanleg með 3 má þá ekki standa 2 í gráa reitnum. Fyrst kann því að virðast sem bæði 0 og 1 passi í gráa reitinn. Séu hins vegar reitirnir ofan gráa reitsins skoðaðir kemur í ljós að sé 1 í gráa reitnum þá verður að velja 2 ská ofan til vinstri og þá 0 ská ofan til hægri sem gengur ekki. Ef 0 er í gráa reitnum má velja 0 ofan til vinstri og 1 ofan til hægri og 2 efst án vandræða.

**7.** Lína $AB$ liggur gegnum $M$, miðpunkt hrings. Snertill við hringinn í punkti $T$ sker línuna $AB$ í punktinum $X$. Boginn $AT$ er 20 cm langur og boginn $TB$ er 16 cm langur (myndin er ekki í réttum hlutföllum). Hversu stórt er hornið $\angle AXT$?




☒ 10° ☐ 15° ☐ 18° ☐ 36°

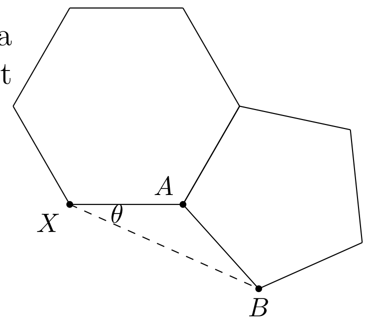
**Skýring:** Þar sem 36 cm spanna 180° þá spannar hver cm 5°. 16 cm boginn spannar því $16 \cdot 5 = 80$ gráður svo hornið $\angle XMT = 80°$. Þríhyrningurinn $XTM$ er rétthyrndur svo hornið $X$ er 10°.

**8.** Úrið hennar Regínu er 10 mínútum of seint en Regína heldur að það sé 5 mínútum of fljótt. Úrið hans Jóa er 5 mínútum of fljótt en hann heldur að það sé 10 mínútum of seint. Hvað heldur Jói að klukkan sé þegar Regína heldur að klukkan sé 12?

☐ 11:30 ☐ 11:45 ☐ 12:00 ☒ 12:30

**Skýring:** Fyrst Regína heldur að klukkan sé 12 þá sýnir úrið hennar 12:05 og þá er klukkan í raun 12:15. Þá sýnir úr Jóa 12:20 og Jói heldur þá að klukkan sé 12:30.

**9.** Reglulegur sexhyrningur og reglulegur fimmhyrningur eiga eina sameiginlega hlið eins og sést á myndinni. Hversu stórt er hornið $\theta = \angle AXB$?




☐ 15° ☐ 20° ☒ 24° ☐ 30°

**Skýring:** Hornasumma reglulegs $n$-hyrnings er $(n-2) \cdot 180°$. Hvert horn reglulegs fimmhyrnings er því $\frac{1}{5}(5-2) \cdot 180° = 108°$. Sömuleiðis er hvert horn reglulegs sexhyrnings 120°. Þarna er því jafnarma þríhyrningur með topphorn af stærð $360° - 108° - 120° = 132°$. Hin tvö hornin eru því $\frac{180°-132°}{2} = 24°$.

**10.** Úr tölustöfunum 1,2,...,9 eru myndaðar þrjár þriggja stafa tölur (hvern tölustaf má nota aðeins einu sinni). Hver eftirtalinna talna er þá örugglega ekki summa talnanna þriggja?

☒ 1500 ☐ 1503 ☐ 1512 ☐ 1521

**Skýring:** Summa tölustafanna allra er 45 og 9 gengur upp í því. Sjáum að þversumma seinni þriggja talnanna er 9 en þversumma fremstu tölunnar er 6 svo 1500 er talan sem sker sig úr. Einnig má finna summurnar $182+364+957 = 1503$, $182 + 356 + 974 = 1512$, $128 + 456 + 937 = 1521$.

## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

**11.** Gutti finnur gamlan reikning fyrir 72 eins stílabókum en einungis þrír tölustafir í miðju fimm stafa upphæðarinnar eru læsilegir: _339_ Hvaða upphæð stóð á reikningnum?

**Svar:** 13392

**Skýring:** Til að upphæðin sé deilanleg með 72 þarf hún að vera deilanleg með bæði 8 og 9. Til að talan sé deilanleg með 8 þarf þiggja stafa talan sem stendur aftast að vera deilanleg með 8, hún getur því aðeins hafa verið 392. Til að talan sé deilanleg með 9 þarf þversumma hennar (summa tölustafa) sömuleiðis að vera deilanleg með 9 og $3 + 3 + 9 + 2 = 17$ og eini möguleikinn er að fyrsti stafurinn hafi verið 1 og þversumman 18. Upphæðin var 13392.

**12.** Talnarunan 1,3,6,10,15,... er þannig að bilið milli aðliggjandi talna lengist alltaf um 1. Hver er sextugasta og þriðja talan í rununni?

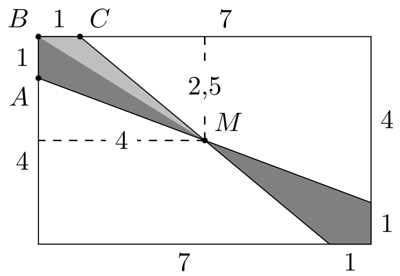
**Svar:** 2016

**Skýring:** Táknum tölu númer $n$ í rununni með $u_n$. Þá gildir að

$$u_n = u_{n-1} + n = u_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = u_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n$$

En $u_1 = 1$ og því er $u_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Þá er ljóst sextugasta og þriðja talan í rununni er $u_{63} = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64 = 2016$.

**13.** Rétthyrningur hefur hliðarlengdir 5 m og 8 m. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins á myndinni, mælt í fermetrum?



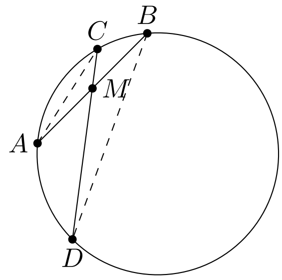

**Svar:** 6.5

**Skýring:** $M$ er miðpunktur rétthyrningsins. Vegna samhverfu er flatarmál skyggða svæðisins jafnt tvöföldu flatarmáli $MCB$ að viðbættu tvöföldu flatarmáli $MBA$:

$$\text{Flatarmál} = 2 \cdot \frac{1 \cdot 2,5}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} = 6{,}5$$

**14.** $AB$ og $CD$ eru strengir í hring. $AB$ hefur lengdina 12. $CD$ sker $AB$ í punkti $M$ sem skiptir $AB$ í tvo jafna hluta. Hver er lengd $CD$ ef vitað er að lengd $DM$ er jöfn fjórfaldri lengd $CM$?

**Svar:** 15

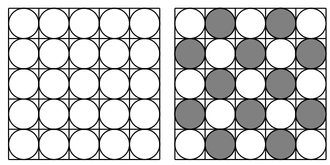



**Skýring:** Táknum $CM$ með $x$; þá er $MD = 4x$. Gefið er að $AM = BM = 6$. Þríhyrningarnir $AMC$ og $DMC$ eru einslaga (ferilhornin $\angle ACD$ og $\angle ABC$ eru jöfn) svo

$$\frac{CM}{BM} = \frac{AM}{DM} \quad \text{eða} \quad \frac{x}{6} = \frac{6}{4x}$$

Þá er $x^2 = 9$ svo $x = 3$. Þá fæst að $CD = 5x = 15$.

**15.** Á $5 \times 5$ spilaborði liggja steinar sem eru hvítir á annarri hliðinni og svartir á hinni. Í upphafi snúa hvítu hliðarnar upp. Í hverjum leik skal snúa við þremur aðliggjandi steinum sem liggja í sömu línu eða sama dálki. Hver er minnstur fjöldi leikja sem gefur köflótta mynstrið sem hér sést?


Byrjun Endir

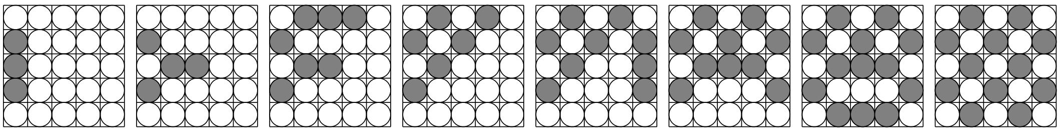
**Svar:** 8

**Skýring:** Athugum fyrst að snúa þarf öllum steinunum sem eiga að verða svartir að minnsta kosti einu sinni og að einungis er hægt að snúa tveimur þeirra í einum leik svo það þarf að minnsta kosti sex leiki til að fá fram mynstrið á myndinni.

Ef þetta væri hægt í sex leikjum þá þyrfti hver einasti leikur að innihalda nákvæmlega tvo steina sem eiga að enda svartir. Ennfremur yrði einum steini sem á að enda hvítur að vera snúið í hverjum leik. Þeim steini þyrfti því að vera snúið í einhverjum öðrum leik og eini leikurinn sem kæmi til greina og snýr tveimur steinum sem enda svartir og voru ekki með í fyrri leiknum er leikurinn sem myndar kross við fyrri leikinn (fer þvert á fyrri leikinn með sama steini í miðjunni). Ef þetta er hægt í sex leikjum þarf því að vera hægt að skipta svörtu steinunum í þrjá sundurlæga krossa. Ef við lítum á tvo steina við sama jaðar sem eiga báðir að enda svartir þá er aðeins einn kross sem inniheldur hvorn stein fyrir sig. En krossarnir tveir deila steini sem á að enda svartur og þar með er ekki hægt að skipta mynstrinu í þrjá sundurlæga krossa og því ekki hægt að ná fram mynstrinu í sex leikjum.

Athugum nú að eftir oddatölu fjölda leikja er oddatölu fjöldi af svörtum steinum og eftir sléttan fjölda leikja er sléttur fjöldi af svörtum steinum því ef við snúm við þremur steinum og $i$ þeirra voru svartir þá breytist fjöldi svatra steina um $3-2i$ ($3-i$ voru hvítir og verða svartir og $i$ voru svartir og verða hvítir).

Það er svo hægt að framkalla mynstrið í átta leikjum eins og á myndin sýnir:



Leikur 1 Leikur 2 Leikur 3 Leikur 4 Leikur 5 Leikur 6 Leikur 7 Leikur 8

## Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

**16.** Kári Lyng var allvel stæður þegar hann féll frá. Hann lét börnunum sínum sex eftir drjúgan arf en setti sérstök skilyrði fyrir skiptingu hans.

- Bjarni átti að fá tvöfalt á við Ása.
- Davíð átti að fá þrefalt á við Ása.
- Erla átti að fá helming af því sem Fríða fengi.
- Gréta átti að fá þriðjung af því sem Fríða fengi.
- Samtals áttu bræðurnir þrír að fá jafnmikið og systurnar þrjár.
- Bjarni átti að fá 8 milljónum meira en Erla.

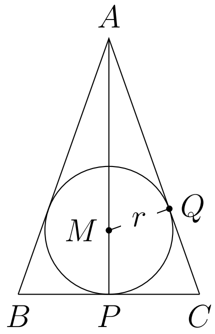
Hver var upphæðin sem Kári Lyng lét eftir sig?

**Lausn:** Ef við látum $x$ tákna upphæðina sem Ási erfði, þá fékk Bjarni $2x$, Davíð $3x$ og bræðurnir samtals $x+2x+3x=6x$. Ef við látum $y$ tákna upphæðina sem Fríða erfði, þá fékk Erla $\frac{1}{2}y$ , Gréta $\frac{1}{3}y$ og systurnar samtals $y+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}y=\frac{11}{6}y$. Bræðurnir þrír áttu að fá jafnmikið og systurnar þrjár svo að $6x=\frac{11}{6}y$ eða $x=\frac{11}{36}y$. Forsendur gefa líka að Bjarni átti að fá 8 milljónum meira en Erla, svo $2x=\frac{1}{2}y+8$ (hér er reiknað í milljónum) eða $x=\frac{1}{4}y+4$. Fyrst

$$x=\frac{11}{36}y \quad \text{og} \quad x=\frac{1}{4}y+4$$

þá fæst jafnan $\frac{11}{36}y=\frac{1}{4}y+4$ sem gefur $11y=9y+144$ eða $2y=144$ svo $y=72$. Þá er $x=\frac{11}{36}72=22$. Heildarupphæðin sem Kári Lyng lét eftir sig er $12x$ eða 264 milljónir. (Og skiptist þannig. Ási: 22, Bjarni: 44, Davíð: 66, Fríða: 72, Erla: 36 og Gréta: 24.)

**17.** Hringur er innritaður í jafnarma þríhyrning $ABC$. Strikið $AP$ fer í gegnum miðju hringsins, $AC = AB = 12$ og $BP = 4$. Hver er radíus hringsins?




**Lausn:** Táknum radíus hringsins með $r$, miðju með $M$ og látum $Q$ tákna snertipunkt hringsins og hliðarinnar $AC$.
Þá er $QC = PC = 4$ og því $AQ = 8$. Þar sem þríhyrningarnir $AQM$ og $APC$ eru einslaga fæst

$$\frac{r}{AQ} = \frac{PC}{AP} \quad \text{svo} \quad r = AQ \cdot \frac{PC}{AP} = 8 \cdot \frac{4}{AP}$$

En $AP = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$, svo $r = 8 \cdot \dfrac{4}{8\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

**18.** Sýnið að 2017 gangi upp í summuna $1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \cdots + 2016^{2015}$.

**Lausn:** Fyrir oddatölu $i$ þá gildir

$$a^i + b^i = (a+b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \cdots + ab^{i-2} + b^{i-1}).$$

Ef við notum þetta á $n^{2015}$ og $(2017-n)^{2015}$ sést að 2017 gengur upp í summu þeirra. Það er svo sléttur fjöldi af liðum sem parast saman tveir og tveir þannig að 2017 gengur upp í summu parsins. Þar með gengur 2017 upp í heildarsummuna.

**19.** Sýnið að fyrir sérhverja jákvæða heiltölu $n$ sé hægt að búa til hóp fólks þannig að fjöldi möguleika til að velja tvo einstaklinga af sama kyni sé $n$ fleiri en fjöldi möguleika til að velja tvo einstaklinga af gagnstæðu kyni.

**Lausn:** Fyrir hóp sem inniheldur $i$ karla og $j$ konur er fjöldi möguleika á að velja tvo einstaklinga af sama kyni

$$\frac{i(i-1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2}$$

og fjöldi möguleika á að velja tvo einstaklinga af gagnstæðu kyni

$$ij.$$

Látum $n$ vera fjölda möguleika til að velja tvo einstaklinga af sama kyni að frádregnum fjölda möguleika til að velja tvo einstaklinga af gagnstæðu kyni. Þá er

$$n = \frac{i(i-1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2} - ij = \frac{i^2 - i + j^2 - j - 2ij}{2} = \frac{(i-j)^2 - i - j}{2}.$$

Ef við látum $i - j = 2n$ þá fæst

$$n = \frac{(i-j)^2 - (i-j) - 2j}{2} = \frac{4n^2 - 2n - 2j}{2} = 2n^2 - n - j.$$

Sem gefur

$$i = 2n^2 \qquad \text{og} \qquad j = 2n^2 - 2n.$$

Þar með er ljóst að ef við búum til hóp samansettan af $2n^2$ körlum og $2n^2 - 2n$ konum verður fjöldi möguleika til að velja tvo einstaklinga af sama kyni $n$ fleiri en fjöldi möguleika til að velja tvo einstaklinga af gagnstæðu kyni.