

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2015–2016 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

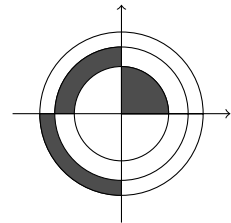
1. Ef x og y eru jákvæðar heilar tölur og $3^x 5^y = 225$, þá er $x + y$ jafnt og

3 4 5 7

2. Appelsínur er raðað í stafla. Botnlagið er 5 appelsínur á breidd og 7 appelsínur á lengd. Í næstu lögum fyrir ofan er hver appelsína skorðuð af fjórum appelsínur. Hver er hámarksfjöldi appelsína í þess konar stafla?

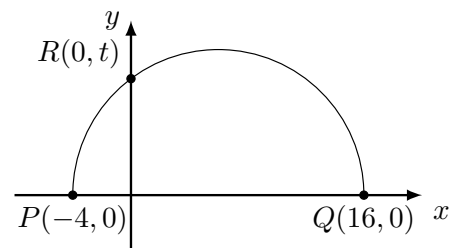
53 80 85 105

3. Á myndinni eru þrjú hringar með miðju í $(0,0)$. Ef skyggðu svæðin hafa öll sama flatarmálið og geisli (radíus) innsta hringins er 1, hvert er þá margfeldi geisla hringanna þriggja?



$\sqrt{6}$ 3 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 6

4. Á myndinni er strikið með endapunkta $P(-4, 0)$ og $Q(16, 0)$ miðstrengur hálfhrings. Ef punkturinn $R(0, t)$ er á hálfhringnum þá er gildið á t jafnt



6 7 8 9

5. Bílasali kaupir tvo bíla. Hann selur annan þeirra fyrir 40% meira en kaupverðið og hinn fyrir 60% meira en kaupverðið. Samtals fær bílasalinn 54% hærri upphæð fyrir bílana heldur en hann greiddi fyrir þá í upphafi. Hvert er hlutfallið milli kaupverðs bílanna tveggja?

10 : 13 20 : 27 3 : 7 7 : 12

6. Ferningslaga miði er brotinn saman uns úr verður ferningur sem að flatarmáli er einn níundi af flatarmáli upprunalega ferningsins. Röð brotanna skiptir ekki máli. Eitt horn er klippt af litla ferningnum og blaðið síðan flatt út aftur. Hvað eru mörg göt á blaðinu?

0 1 2 4

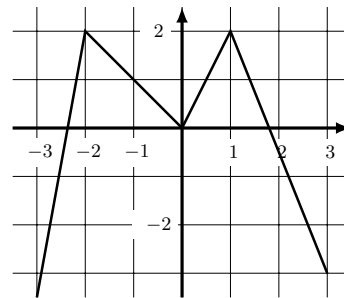
7. Ef $2^{2013} + 4^{1007} + 8^{671} = 32^x$ þá er x

303 353 403 671

8. Stafrænn sendir er forritaður til að senda ákveðna 5-bita runu, þ.e. runu af 5 tölustöfum sem annaðhvort eru 0 eða 1. Hann er látinn senda rununa 4 sinnum, einu sinni rétta, einu sinni með einni villu, einu sinni með tveimur villum og einu sinni með þremur villum. Fyrir neðan eru sýndar runurnar sem hann sendir. Hver þeirra er sú rétta?

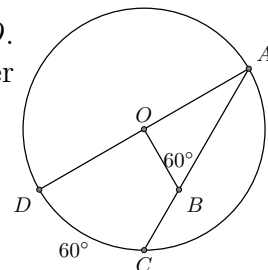
00001 00100 01100 10010

9. Hversu mörg gildi á x er hægt að finna þannig að punktarnir (x, b) og $(b, 2)$ liggi á ferlinum sem sýndur er á mynd?



2 4 6 Engin

10. Myndin sýnir hring með miðstreng AD og miðju O . Boginn CD er 60° og hornið $\angle ABO = 60^\circ$. Hver er lengd striksins BC ef lengd striksins OB er 5?



$3\sqrt{5}$ 5 $5\sqrt{3}$ 10

Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Um jákvæðar heiltölur x og y gildir að $x^2 - y^2 = 100$. Finnið gildið á $x^2 + y^2$.

Svar: _____

12. a og b eru rauntölur þannig að $ax^3 + 6x^2 + 9x + b = (p(x))^3$ þar sem $p(x)$ er margliða. Hvert er gildið á ab ?

Svar: _____

13. Ferhyrningur $ABCD$ með innritaðan hring hefur hliðarlengdir $AB = 3$, $CD = 8$ og $AD = 7$. Hver er lengd hliðar BC ?

Svar: _____

14. Hversu margar jákvæðar heiltölur minni en 1000 hafa þversummuna 9?
(**Þversumma** tölu er summa tölustafa tölunnar; talan 234 hefur þversummu $2 + 3 + 4 = 9$.)

Svar: _____

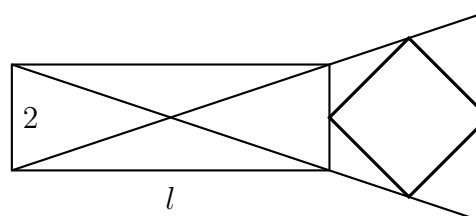
15. Hvert er gildið á $2^{\frac{1}{a-b}}$ ef $17^a = 16$ og $17^b = 4$?

Svar: _____

Priðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

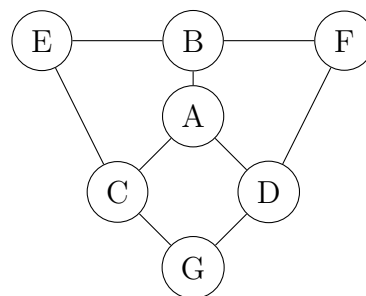
16. Myndin sýnir ferning þar sem eitt horn hans snertir rétthyrning af stærðinni $2 \times l$. Önnur tvö horn ferningsins snerta framlengdar hornalínur rétthyrningsins og fjórða horn ferningsins er á framlengdri línu sem liggur um miðju rétthyrningsins og andstætt horn ferningsins.



Finnið lengdina l þegar flatarmál rétthyrningsins og ferningsins eru jöfn.

17. Sannið að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur a og b sem eru þannig að $4a^2 + 4a = b^2 + b$.

18. Tölurnar $1, 2, \dots, 7$ eru faldar undir bókstafspjöldunum þannig að summan í hverjum ferhyrningi er 15. Hvaða tala er falin undir A?



19. Sérhver jákvæð heiltala er lituð einum af þremur ólíkum litum. Sannið að til séu ólíkar jákvæðar heiltölur x og y sem báðar hafa sama lit og $|x - y|$ sé ferningstala.